

Contrôle des connaissances du cours
« Bruits et Signaux »
du DEA d'Astrophysique de Paris 7 et Paris 11

Corrigé

Meudon le vendredi 20 décembre 1996 de 9h30 à 11h30 salle 204.

Le contrôle est noté sur 40, la note finale sur 20 sera :

$$\text{note}_{20} = \min(20, \text{note}_{40}).$$

Vous pouvez donc choisir les exercices que vous voulez, si vous ne savez pas répondre à une question admettez-la tout simplement. Le barème est indiqué en fin d'exercice. Les questions à 1 point sont relativement faciles, celles à 2 points demandent un peu plus de réflexion, ne passez pas trop de temps sur les questions à 3 points.

Enoncés des exercices :

1. **Changement de variable.** Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .
 - i) Rappeler l'expression de la densité de probabilité de la variable aléatoire X .
On procède ensuite au changement de variable $Y = \exp X$, la variable aléatoire Y suit alors une loi de densité de probabilité notée f .
 - ii) Donner l'expression de cette densité de probabilité f de Y .
 - iii) Quelle est la valeur de la médiane de Y ? Justifier votre réponse.
Soient deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 suivant la loi de densité de probabilité f trouvée ci-dessus.
 - iv) Quelle est la densité de probabilité du produit $Z = Y_1 Y_2$?¹
 - v) Quelle est la densité de probabilité du rapport $Z = Y_1 / Y_2$?
(1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 points)

Corrigé.

i) Soit ϕ la densité de probabilité de X , on a :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

ii) Le changement de variable $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ est bijectif [φ est égal à $\exp(\cdot)$]. La densité de probabilité $f(y)$ de Y s'obtient par $\phi(x)dx = f(y)dy$, soit :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

¹On admettra le théorème qui affirme que si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, alors les variables aléatoires obtenues par le changement de variable $Y_i = \varphi(X_i)$ sont aussi indépendantes à la condition que φ soit mesurable (par exemple continue).

La variable aléatoire Y suit une loi lognormale, μ et σ^2 sont les paramètres de cette loi (ces paramètres ne correspondent pas à des moments).

iii) Ce changement de variable étant bijectif, les quantiles de l'image par φ sont égaux à l'image des quantiles de X . On a donc médiane de $Y = \exp(\mu)$.

iv) On a : $Z = \exp(X_1) \exp(X_2) = \exp(X_1 + X_2)$. La somme de deux variables aléatoires normales indépendantes suit une loi normale de moyenne $\mu_1 + \mu_2$ et de variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. La variable Z suit alors une loi lognormale de paramètres $\mu_1 + \mu_2$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Dans ce cas particulier $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

v) Même raisonnement, Z suit une loi lognormale de paramètres $\mu_1 - \mu_2$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

2. **Principe de l'intégration par Monte-Carlo.** On désire calculer numériquement l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du.$$

On pense l'approximer par la quantité J_n suivante :

$$J_n = \frac{\pi}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(U_i),$$

où les U_i sont des variables aléatoires uniformes indépendantes réparties entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

i) Calculer la moyenne et l'écart type des variables aléatoires $X_i = \cos(U_i)$.

ii) La quantité J_n est aussi une variable aléatoire, calculer sa moyenne et son écart type.

iii) Montrer que J peut se calculer à partir de l'espérance d'une certaine variable aléatoire. Dans quelle mesure et en quel sens peut-on alors dire que J_n converge vers J lorsque $n \rightarrow \infty$?

iv) Donner une approximation de l'erreur commise si on identifie J par J_n ? Plus précisément quelle est approximativement la densité de probabilité de l'erreur $J - J_n$? A quel résultat général a-t-on dû faire appel ?

v) Que doit valoir n si l'on veut que l'approximation de J par J_n soit meilleure que 0.05 dans 90% des cas ?

(1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 10)

Corrigé. Nous donnons les réponses aux questions et ensuite un exposé sur le principe de la méthode à partir de l'exemple de l'exercice.

i) On pose $X = \cos(U)$, la densité de U est $f_U(u) = \frac{2}{\pi}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Il est inutile de calculer la densité de X afin d'évaluer $E\{X\}$ car on sait que $E\{X\} = E\{\cos(U)\}$. Il vient pour la moyenne :

$$E\{X\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \, du = \frac{2}{\pi},$$

et pour l'écart type $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E\{(X - E\{X\})^2\} = E\{X^2\} - (E\{X\})^2, \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \, du - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2. \end{aligned}$$

Soit :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2}.$$

ii) Pour la moyenne on utilise la linéarité de l'espérance, il vient :

$$E\{J_n\} = E\left\{\frac{\pi}{2n} \sum_i \cos U_i\right\} = \frac{\pi}{2n} \sum_i E\{X_i\} = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{2}{\pi} = 1.$$

Pour la variance (et donc l'écart type) on utilise le fait que les U_i et par conséquent les X_i sont indépendants. Sous cette condition on a : « variance de la somme = somme des variances » et il vient :

$$\begin{aligned} \text{Var}(J_n) &= \text{Var}\left(\frac{\pi}{2n} \sum_i X_i\right), \\ &= \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \sum_i \text{Var}(X_i), \\ &= \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 n\sigma^2, \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

On aurait pu mener ce calcul plus rapidement (voir texte ci-dessous).

iii) On a $E\{X\} = \frac{2}{\pi}J_n$, par ailleurs $\frac{2}{\pi}J_n$ est la moyenne arithmétique d'un échantillon issu de X . D'après la loi des grands nombres (voir ci-dessous) $J_n \xrightarrow{\text{p.s.}} J$.

iv) Voir texte ci-dessous.

v) Voir texte ci-dessous.

Nous allons exposer le principe de l'intégration par la méthode de Monte-Carlo à l'aide de cet exemple simple. Supposons que l'on désire évaluer numériquement l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du, \quad (1)$$

dans ce cas particulier le résultat est trivial on a $J = 1$, mais le principe de la méthode s'applique à des calculs d'intégrales bien plus complexes.

En écrivant l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{2}{\pi}J = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du, \quad (2)$$

on peut interpréter $\frac{2}{\pi}J$ comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X = \cos(U)$ où U est une variable aléatoire uniforme entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: $U = \mathcal{U}(0, \frac{\pi}{2})$.

Soient (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires calculées, grâce au changement de variable $x = \cos u$, à partir d'un ensemble (U_1, \dots, U_n) de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ces variables X_i sont indépendantes, elles ont toutes la même moyenne $E\{X_i\} = \frac{2}{\pi}J$ et cette moyenne existe. On définit alors les variables aléatoires J_n par l'intermédiaire de la moyenne arithmétique des X_i :

$$\frac{2}{\pi}J_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (3)$$

D'après la loi forte des grands nombres ces variables convergent presque-sûrement vers la moyenne commune des X_i lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{2}{\pi} J_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}\{X_i\} = \frac{2}{\pi} J. \quad (4)$$

Ce résultat contient le principe même des méthodes Monte-Carlo : on approxime une certaine quantité J (ici une intégrale) par des variables aléatoires J_n à la condition que la loi des grands nombres s'applique. Pour quantifier la qualité de l'approximation pour n fixé ou pour calculer n afin que l'approximation soit meilleure qu'une certaine tolérance, il faut que les J_n possèdent une variance de façon à pouvoir utiliser le théorème central limite.

Dans notre cas les X_i possèdent la même moyenne mais aussi la même variance $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 \neq 0$. On peut alors appliquer la version de Lévy-Lindeberg du théorème central limite (théorème 5.19) qui décrit comment se répartissent les erreurs $J_n - J$ lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\sqrt{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{2}{\pi} J}{\sigma} = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (J_n - J) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (5)$$

Pour un n assez grand on a alors quel que soit n :

$$\Pr\left\{\frac{2\sqrt{n}}{\pi\sigma} |J_n - J| < \epsilon\right\} \approx \Phi(\epsilon) - \Phi(-\epsilon) = 2\Phi(\epsilon) - 1, \quad (6)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale réduite. Reste à calculer σ , c'est-à-dire :

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \frac{2}{\pi} J)^2 dx, \quad (7)$$

qui, dans un cas plus complexe, serait une intégrale aussi difficile à calculer que l'intégrale originale, on devrait alors se contenter d'une approximation. Ici le résultat est simple : $\sigma^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$.

Si l'on désire une approximation de J meilleure que 5% dans 90% des cas il faut trouver n tel que : $\Pr\{|J_n - J| < 0.05\} = 0.9$. Cet objectif sera atteint dès que l'on aura :

$$\frac{\pi\sigma}{2\sqrt{n}} \epsilon < 0.05. \quad (8)$$

On a $2\Phi(\epsilon) - 1 = 0.9$ pour $\epsilon \approx 1.645$, et la condition précédente s'écrit :

$$n > \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) \left(\frac{1.645}{2 \times 0.05}\right)^2 \approx 252.96, \quad (9)$$

et l'approximation souhaitée sera réalisée avec la probabilité 0.9 dès que $n > 252$.

S'il avait fallu approximer σ on aurait pu le faire à l'aide de « la formule de propagation des erreurs » (voir équation (3.70), page 57 du cours). Cette formule permet de calculer approximativement la variance de $X = \varphi(U)$ connaissant la moyenne et la variance de U :

$$\text{Var}(X) \approx \text{Var}(U) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{u=\mathbb{E}\{U\}}^2. \quad (10)$$

Dans l'exemple traité on a $X = \cos U$, où U est uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $E\{U\} = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Var}(U) = \frac{\pi^2}{48}$ (voir équation (6.25), page 106). On en déduit $\sigma^2 \approx \frac{\pi^2}{48} \sin^2 \frac{\pi}{4}$, soit $\sigma \approx 0.38$ alors que la vraie valeur est $\sigma \approx 0.31$. En utilisant cette approximation de σ on aurait trouvé que n devait être supérieur à 388.

3. **Simulation de la loi de Poisson.** On dispose d'un programme permettant de « tirer » des nombres au hasard suivant la loi uniforme entre 0 et 1. Soit U une variable aléatoire simulée par ce programme.

i) Comment transformer U de façon à obtenir une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) ?

ii) Comment obtenir une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de moyenne μ ?

(2 + 3 = 5 points)

Corrigé.

i) Soit F la fonction de répartition de la loi exponentielle, le changement de variable aléatoire $T = F^{-1}(U)$ répond à la question (voir page 30 du cours). On a $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$. D'où la variable aléatoire :

$$T = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

suit la loi exponentielle. Mais $1 - U$ suit aussi la loi uniforme d'où :

$$T = -\frac{1}{\lambda} \ln(U)$$

suit aussi la loi exponentielle.

ii) Posons $\mu = \lambda t$. D'après les considérations du chapitre 7 sur les flux de Poisson, il suffit d'ajouter les T_i obtenus avec la loi exponentielle jusqu'à juste dépasser le seuil t , c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{N+1} T_i > t \text{ avec } \sum_{i=1}^N T_i \leq t \quad t = \frac{\mu}{\lambda}.$$

On simule ainsi l'arrivée de N photons dans le temps t lorsque le taux d'arrivée des photons est λ .

4. **Flux de Poisson non-stationnaire.** On désire simuler l'observation d'une source variable assimilée à un flux de Poisson non-stationnaire dont le taux instantané de photons est donné, en fonction du temps, par l'expression :

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(\omega t + \phi).$$

Les quantités λ_0 , λ_1 , ω et ϕ sont des scalaires, ω et ϕ sont supposées connues. L'unité de λ , λ_0 et λ_1 est [nombre de photons][unité de temps]⁻¹. La quantité λ_0 représente le bruit et le reste de l'expression ci-dessus représente le signal. On a naturellement $\lambda_1 \leq \lambda_0$.

On veut simuler l'observation de cette source à l'aide d'un programme comme celui de l'exercice 3. Pour cela on découpe l'axe des temps en petits intervalles Δt et on simule le nombre de photons susceptibles d'être observés pendant cet intervalle de temps.

i) Décrire un programme permettant d'atteindre le but désiré.

Dans l'éventualité où λ_0 et/ou λ_1 sont petits devant 1, on se rend vite compte que cette façon de faire n'est pas la plus efficace. En effet on obtiendra 0 la plupart du temps et seulement rarement 1 (presque jamais 2 ou plus). Mieux vaudrait ne retenir que les temps où on tire un 1.

On suppose alors que bruit et signal sont indépendants et on se propose de simuler le bruit d'un côté, le signal de l'autre puis de faire la somme entre les deux. En fait on simule $\lambda_b(t) = \lambda_0 - \lambda_1$ et $\lambda_s(t) = \lambda_1[1 + \cos(\omega t + \phi)]$ et on s'intéresse maintenant à la simulation de $\lambda_s(t)$ lorsque λ_1 est très petit devant 1. On songe alors au changement de variable :

$$\theta = \int_0^t \lambda_s(u) du.$$

ii) Que devient le flux de photons si on le représente en fonction du « temps » θ au lieu du temps t ?

iii) Décrire alors une façon d'obtenir les temps T_i séparant les arrivées de photons dans le cas de ce processus de Poisson non-stationnaire. On demande de simuler n arrivées de photons, n étant donné à l'avance.

(2 + 2 + 3 = 7 points)

Corrigé.

i) Pour chaque intervalle Δt on calcule $\mu = \int_{\Delta t} \lambda(t) dt$, puis on simule un nombre entier N suivant la loi de Poisson de paramètre μ .

ii) On pose $\theta = \mu(t) = \int_0^t \lambda_s(u) du$. Par continuité de la fonction μ (voir note de la page 1) il vient que le flux en θ est ordinaire et sans post-action. De plus on a $\frac{d\mu}{d\theta} = 1$, le flux est donc stationnaire. Le flux en θ est alors un flux de Poisson de paramètre 1.

iii) Il faut noter que le changement variable μ est bijectif, μ est une fonction monotone croissante. On simule alors un flux de Poisson de paramètre 1, soient θ_i les valeurs ainsi simulées. On obtient ensuite les T_i du flux non-stationnaire par transformation inverse, soit : $T_i = \mu^{-1}(\theta_i)$.

5. **Information de Fisher.** Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, \theta]$, $\theta > 0$. La borne supérieure : θ de l'intervalle de définition de U est inconnue et on va chercher à l'estimer à l'aide d'un échantillon de taille n .

i) Donner l'expression de la fonction de vraisemblance L de l'échantillon pour les valeurs de θ .

ii) Donner l'expression de l'information de Fisher $I_n(\theta)$ fournie par l'échantillon pour l'estimation de θ .

iii) Calculer cette information de Fisher.

(2 + 1 + 2 = 5 points)

Corrigé.

i) Pour une réalisation u_i de U_i , on a la fonction de vraisemblance $F_i(u_i)$:

$$F_i(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } u_i \leq \theta ; \\ 0 & \text{si } u_i > \theta . \end{cases}$$

Ce qui s'écrit encore : $F_i(u_i) = \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{u_i \leq \theta}$, où $\mathbf{1}_{u_i \leq \theta}$ est la fonction indicatrice qui vaut 1 si $u_i \leq \theta$ et 0 dans le cas contraire. Les variables aléatoires étant indépendantes, il vient : $L(u_1, \dots, u_n | \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{u_i \leq \theta}$. Soit :

$$L(u_1, \dots, u_n | \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbf{1}_{\max_i(u_i) \leq \theta}.$$

ii) Par définition l'information de Fisher est donnée par :

$$I_n(\theta) = E \left\{ \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)^2 \right\}.$$

Il ne fallait *surtout pas* dire que :

$$I_n(\theta) = E \left\{ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right\},$$

car nous ne sommes pas dans les conditions où l'inégalité de Rao-Cramér s'applique (la borne supérieure de l'intégration dans le calcul de l'espérance dépend du paramètre à estimer : θ).

iii) Dans le domaine $[0, \theta]$ où U est défini on a :

$$I_n(\theta) = \int \dots \int_0^\theta \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)^2 L du_1 \dots du_n.$$

On a : $L = \frac{1}{\theta^n}$, $\ln L = -n \ln \theta$, $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L = -\frac{n}{\theta}$, d'où :

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= \int \dots \int_0^\theta \frac{n^2}{\theta^2} \frac{1}{\theta^n} du_1 \dots du_n, \\ &= \frac{n^2}{\theta^2}. \end{aligned}$$

On trouve $I_n(\theta) = n^2 I_1(\theta)$ et non pas $I_n(\theta) = n I_1(\theta)$. On aurait trouvé cette valeur si l'inégalité de Rao-Cramér avait été applicable.

6. **Détection.** On a observé un spectre formé de 30 pixels : X_1, \dots, X_{30} . Sous hypothèse nulle (H_0), ce spectre ne représente qu'un bruit normal de moyenne μ et d'écart type σ . On suppose que les paramètres μ et σ sont connus et que les pixels sont indépendants les uns des autres.

i) On s'attend à trouver une raie en émission ou en absorption au pixel numéro 15 (par exemple). A quelle valeur de la fausse-alarme α correspond un critère de détection basé sur la « règle des 3-sigmas » ?

ii) Même question, mais on s'attend à trouver une raie en émission.

iii) On s'attend de nouveau à une raie en émission ou en absorption, mais on a aucune idée du pixel sur lequel elle est susceptible d'apparaître. Que devient la fausse-alarme α si l'on applique toujours la règle des 3-sigmas dès qu'au moins 1 pixel dépasse le seuil critique ?

(1 + 1 + 2 = 4 points)

Corrigé.

i) On détecte une raie si le pixel numéro 30 dépasse le niveau 3σ en dessus ou au dessous de la moyenne μ . Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale réduite on a $\alpha = 1 - (\Phi(3) - \Phi(-3))$ d'après la table 4.1 on a $\alpha \approx 0.003$

ii) Dans ce cas on a $\alpha = 1 - \Phi(3) \approx 0.0015$.

iii) La probabilité pour qu'au moins 1 pixel dépasse le seuil critique est « $1 -$ la probabilité pour qu'ils soient tous en dessous du seuil ». Dans le cas d'une raie en émission ou en absorption cela donne :

$$\alpha = 1 - (\Phi(3) - \Phi(-3))^{30} \approx 0.0862 \approx 30 \times 0.003$$

7. **Bruit résiduel.** Un expérimentateur a interprété ses données \mathbf{x} à l'aide d'un modèle théorique μ . La différence entre ses données et le modèle lui donne un bruit résiduel ϵ que l'on peut considérer comme issu d'une loi normale à 30 dimensions de moyenne nulle et de matrice des variances-covariances \mathbf{V} connue. Pour juger de l'adéquation de son modèle vis-à-vis des données, il décide de calculer la valeur du χ^2 attachée à ce bruit résiduel.

i) Donner l'expression qui lui permet de calculer cette quantité χ^2 .

ii) Il a trouvé $\chi^2 = 49$, Cette valeur est-elle acceptable au niveau de « fausse-alarne » $\alpha = 0.01$?

iii) Pouvez-vous dire, en des termes précis, quelle devra être sa conclusion ?

(1 + 2 + 1 = 4 points)

Corrigé.

i) $\chi^2 = \epsilon^t \mathbf{V}^{-1} \epsilon$.

ii) Pour la loi normale cette quantité suit une loi du χ_{30}^2 à 30 degrés de liberté. Des quantiles de cette loi sont donnés par la table 4.4, on trouve pour $\alpha = 0.01$ ($\gamma = 0.99$), $k_{0.99} = 7.134$. On a $\chi^2 = 49 < 7.134^2 \approx 51$, et la valeur est acceptable.

iii) En conséquence, on doit admettre que les données ne contredisent pas l'hypothèse nulle. Le modèle μ est donc compatible avec les données \mathbf{x} au niveau de signification de 99%.