Contrôle des connaissances du cours
« Bruits et Signaux »
de l'Ecole Doctorale d'Astrophysique.
$\boxed{\textbf{Corrigé}}$

Le vendredi 19 décembre 1997 de 10h à 12h amphi de l'IAP.

Le contrôle est noté sur 20, le barème est indiqué à la fin de chaque groupe de questions.

Mesure de raies d'émission dans un spectre.

On a observé un objet à l'aide d'un spectrographe monté au foyer d'un télescope. Dans le domaine spectral étudié, le spectre de l'objet est formé d'un continu de niveau constant λ_0 et d'une raie d'émission dont le profil est celui d'une gaussienne. Plus précisément, si $\lambda(x)$ désigne le flux en provenance de l'objet et reçu par le spectrographe, on a :

$$\lambda(x) = \lambda_0 + A \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\frac{x-P}{W}\right]^2\right\}, \tag{1}$$

où x désigne la longueur d'onde. Les unités de $\lambda(x)$ sont en nombre de photons par seconde et par Angstroem (Ph/s/Å). Les quantités λ_0, A, P et W sont inconnues mais peuvent être considérées comme constantes au cours de l'observation (l'objet n'est pas variable).

A- Paramètres de la source.

① Le paramètre λ_0 est l'intensité du continu, que signifient les autres quantités A, P et W ?

② On désigne par I l'intensité totale de la raie, c'est à dire :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda(x) - \lambda_0)\, dx\,.$$

Que vaut l'intensité I de la raie ?

($1+1$ points.)

Corrigé.

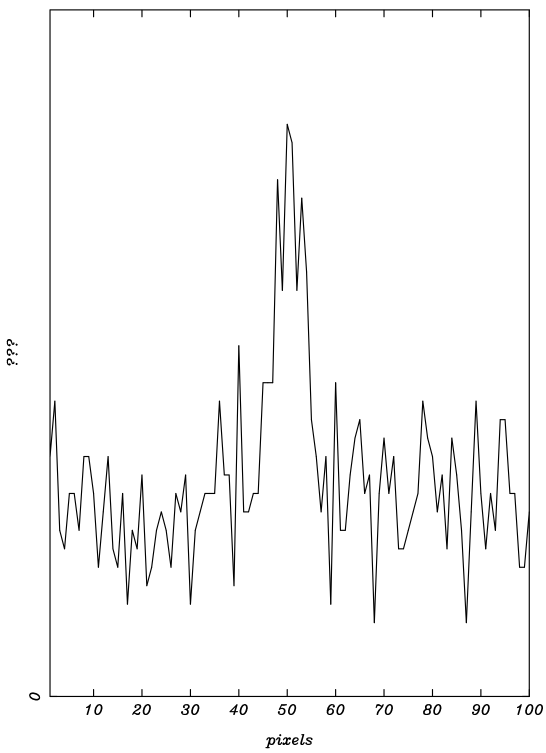
❶ A est l'amplitude de la raie, P sa position et W son écart type. On utilise plus volontiers la largeur totale à mi-hauteur Δ de la raie. On a : $\Delta = 2\sqrt{2\ln 2}W \approx 2.355\,W$.

❷ On sait que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\frac{x}{\sigma}\right]^2\right\} dx = 1\,.$$

D'où : $I = \sqrt{2\pi}AW$.

FIG. 1 – Une observation de 60 sec du spectre.



B- Rapport signal sur bruit.

On désigne par l'expression « rapport signal sur bruit » d'une variable aléatoire X le rapport S de la moyenne de cette variable aléatoire divisé par son écart type. On a alors par définition :

$$S = \frac{\mathrm{E}\{X\}}{[\mathrm{Var}(X)]^{\frac{1}{2}}} . \tag{2}$$

① Le détecteur est formé de N pixels qui intègrent le signal sur un intervalle de longueur d'onde Δx autour de la longueur d'onde x_i pendant le temps T. Quel est l'expression du rapport signal sur bruit du nombre de photons détecté dans le pixel numéro i ?

On supposera que $\lambda(x)$ est constant sur un pixel et que la seule source de bruit provient de l'émission de la lumière de l'objet lui-même.

② Une observation est représentée par la figure 1, le temps de pose était de 1 minute et $\Delta x = 1$Å. L'observateur ne sait pas quelle est l'échelle verticale (ce qui est souvent le cas) mais il sait qu'elle est proportionelle au nombre de photons reçus. Pouvez-vous donner, au vu de la figure 1, une approximation de λ_0 ?

③ On décide d'approximer l'intensité vraie de la raie en faisant la somme des photons reçus au dessus du continu dans un certain nombre k de pixels centrés sur la raie. Soit $\widehat{I}_k$ cette approximation, on a :

$$\widehat{I}_k = \sum_{i=n}^{n+k-1} (y_i - \lambda_0 \Delta x T)\,, \tag{3}$$

où y_i désigne le nombre de photons reçus au pixel numéro i, y_i est une réalisation de la variable aléatoire Y_i. On suppose que λ_0 est connu et que les variables aléatoires Y_i et Y_j $(i \neq j)$ sont indépendantes.

Quel est le rapport signal sur bruit de I_k ?

④ En approximant l'intensité I de la raie par $\widehat{I}_k$ on commet deux sortes d'erreurs : 1) une erreur statistique du fait que les valeurs y_i sont des réalisations des variables aléatoires Y_i et 2) une erreur systématique du fait que l'on ne somme pas les pixels sur tout le support de la raie (théoriquement de $-\infty$ à $+\infty$). Visiblement si l'on augmente le nombre de pixels sur lequel porte la somme l'erreur statistique va augmenter, réciproquement si ce nombre de pixel est trop petit c'est l'erreur systématique qui va être trop grande.

Pouvez-vous trouver un critère qui permette de fixer le nombre de pixels sur lequel doit porter la somme (3) ? (On demande l'idée, pas les calculs.)

On suppose que les k pixels sont centrés sur la raie, pouvez-vous donner l'allure de la courbe représentant la valeur de ce critère en fonction de k ?

($1 + 2 + 2 + 3$ points.)

Corrigé.

❶ Le nombre de photons reçus au pixel numéro i est y_i c'est une réalisation de la variable aléatoire Y_i. Le bruit est un bruit de Poisson, le nombre moyen de photons par pixel est : $\mathrm{E}\{Y_i\} = \lambda(x_i)\Delta x T$. Où x_i désigne la longueur d'onde au milieu du pixel i. Pour un bruit de Poisson on a : $\mathrm{E}\{Y_i\} = \mathrm{Var}(Y_i)$, d'où $S_i = [\lambda(x_i)\Delta x T]^{1/2}$.

❷ Le rapport signal sur bruit dans le continu (en dehors de la raie) semble être de l'ordre de 3, on a alors $[\lambda_0 \Delta x T]^{1/2} \approx 3$. Avec $T = 60$ et $\Delta x = 1$ cela donne $\lambda_0 \approx 0.15$ ph/s/Å.

❸ Y_i est une variable de Poisson de moyenne :

$$\mathrm{E}\{Y_i\} = T \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x} \lambda(x)\, dx\,,$$

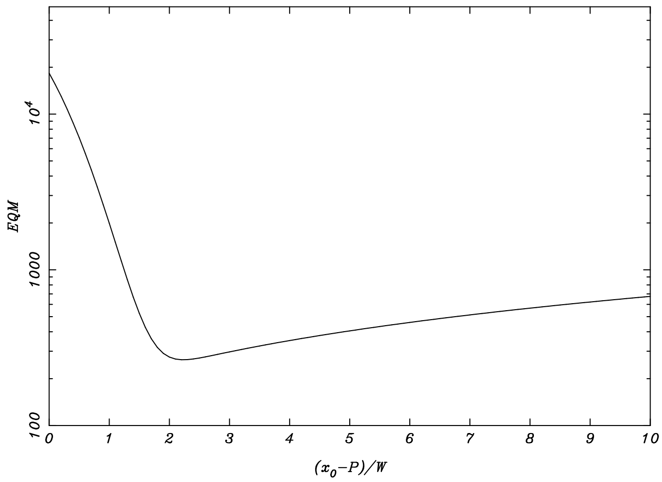
et de variance $\mathrm{Var}(Y_i) = \mathrm{E}\{Y_i\}$. L'espérance d'une somme est égale à la somme des espérances et la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances, d'où

$$SB(\widehat{I}_k) = T^{\frac{1}{2}} \frac{\int_{x_{\text{deb}}}^{x_{\text{fin}}} (\lambda(x) - \lambda_0)\, dx}{\left[\int_{x_{\text{deb}}}^{x_{\text{fin}}} \lambda(x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Avec $x_{\text{deb}} = x_n - \frac{1}{2}\Delta x$ et $x_{\text{fin}} = x_{n+k-1} + \frac{1}{2}\Delta x$.

❹ On peut chercher a minimiser l'écart quadratique moyen de $\widehat{I}_k$, cette quantité dépend de l'erreur systématique (le biais) et de l'erreur statistique (l'écart type)

FIG. 2 – Evolution de l'écart quadratique moyen de l'intensité de la raie en fonction du domaine d'intégration.



suivant la formule :

$$\begin{aligned}[\text{écart quadratique moyen}]^2 &= [\text{erreur systématique}]^2 + [\text{erreur statistique}]^2\,,\\ &= [\text{biais}]^2 + [\text{écart type}]^2\,,\\ &= [\text{biais}]^2 + [\text{variance}]\,.\end{aligned}$$

Le biais diminue très vite avec k alors que la variance augmente lentement depuis zéro. On s'attend alors à une courbe qui présente un minimum pour une valeur de k correspondant à un certain nombre de fois l'écart type de la raie (typiquement 2 ou 3 fois W). On a effectué le calcul de cet écart quadratique moyen pour les données de notre problème le résultat est illustré par le figure 2, on y observe un minimum pour la valeur 2 environ. On a supposé que l'on intégrait la raie symétriquement autour de P : de $P - x_0$ à $P + x_0$. Dans notre cas on a $W = 3$ ce qui correspond à une intégration portant sur environ 12 pixels autour du maximum de la raie. Dans un cas réel on ne connaît pas W ni P mais on peut les estimer.

C- Détection.

On cherche maintenant à estimer les paramètres λ_0, A, P et W.

① On suppose connus λ_0 et W et on cherche à estimer P. On construit pour cela une raie « exploratrice » où A vaut 1 et où P est estimé par P'. On intègre cette raie sur les pixels du détecteur de la façon suivante :

$$z_i(P') = \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\frac{x - P'}{W}\right]^2\right\} dx\,. \tag{4}$$

On pose $y_0 = \lambda_0 \Delta x T$ et on construit la quantité $R(P')$ telle que :

$$R(P') = \sum_{i=1}^{N} z_i(P')(y_i - y_0)\,. \tag{5}$$

On rappelle que y_i désigne le nombre de photons observés au pixel i. Expliquer pourquoi le maximum de $R(P')$ permet de trouver une bonne approximation de P. On ne demande pas de longs calculs mais l'idée directrice. On envisagera tout d'abord le cas où le bruit est négligeable.

② Quelle est l'allure de la courbe représentant $R(P')$ en fonction de P' ?

③ On veut maintenant estimer l'ensemble des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance sans supposer que l'un quelconque de ces paramètre est connu. Donner l'expression de la fonction de vraisemblance L de l'observation.

④ Donner l'expression de cette fonction de vraisemblance dans le cas où le temps de pose est grand, c'est-à-dire lorsque le théorème central limite permet d'approximer le bruit par un bruit normal additif.

⑤ Que faut-il supposer pour que la méthode du maximum de vraisemblance soit équivalente à une méthode des moindres carrés ?

($2+2+2+2+2$ points.)

Corrigé.

❶ L'expression (5) est un produit scalaire notons le $(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)$. Comme pour tout produit scalaire on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0) \leq \sqrt{(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)}$. Les quantités $(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{z})$ et $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)$ sont connues et ne dépendent pas de P'. Le maximum de $R(P') = (\boldsymbol{z}(P')|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)$ est alors atteint lorsque $\boldsymbol{z}$ est proportionnel à $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0$, c'est-à-dire quand $P' = P$.

En présence de bruit on s'attend à un déplacement du maximum de $R(P')$ autour de P, mais l'effet de moyenne de la somme permet de penser que ce déplacement doit être faible.

❷ La fonction $\boldsymbol{z}$ étant symétrique, le produit scalaire revient à la convolution d'une gaussienne par une gaussienne bruitée, ces deux gaussiennes ont la même largeur W. Le résultat doit être assez proche d'une gaussienne de largeur $\sqrt{2}W$ centrée autour de P à laquelle se superpose un bruit très corrélé. Cette fonction a été calculée pour les données de notre problème et est représentée sur la figure 3

❸ La probabilité de la variable de Poisson Y_i de moyenne μ_i est : $\Pr\{Y_i = y_i\} = \mu_i^{y_i} e^{-\mu_i}/y_i!$, d'où l'expression de la fonction de vraisemblance :

$$L = \prod_{i=1}^{N} \frac{\mu_i^{y_i}}{y_i!} e^{-\mu_i}\,,$$

avec

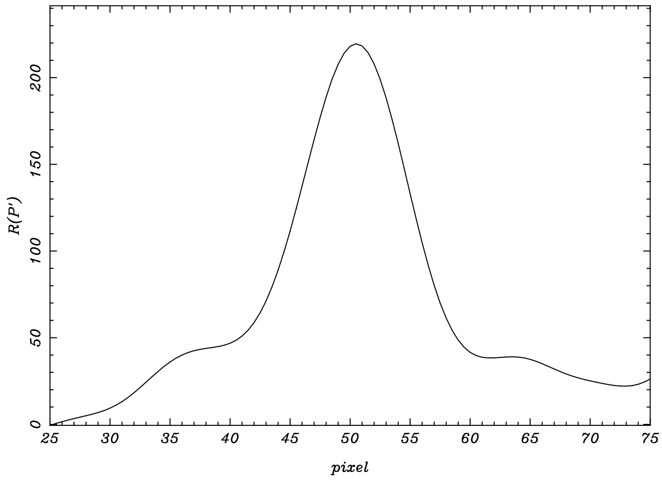
$$\mu_i = T \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x} \lambda(x)\, dx \approx T\lambda(x_i)\Delta x\,,$$

où $\lambda(x)$ est donné par l'équation (1). Les y_i sont connus (ce sont les observations) et L dépend des paramètres par l'intermédiaire de $\lambda(x)$.

❹ Dans ces conditions on peut approximer le bruit de Poisson par un bruit normal de moyenne μ_i et d'écart type $\sqrt{\mu_i}$. Les variables aléatoires Y_i étant indépendantes, la matrice des variances-covariances des Y_i est diagonale et ses éléments diagonaux sont les μ_i. Soit $\boldsymbol{V}$ cette matrice. On a alors :

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \boldsymbol{V})^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\tfrac{1}{2}\chi^2\} \quad \text{avec} \quad \chi^2 = (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\,.$$

FIG. 3 – Corrélation $R(P')$ de l'observation avec une gaussienne « exploratrice ». Le maximum de $R(P')$ est en $P' = 50.52$ la vraie valeur est $P = 50$.



Dans notre cas :

$$\det \boldsymbol{V} = \prod_{i=1}^{N} \mu_i \quad \text{et} \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\mu_i}$$

❺ Il faut supposer que l'on peut approximer les écarts types par des constantes, par exemple par $\mu_i \approx y_i$. Dans ces conditions $\det \boldsymbol{V}$ ne dépend pas des paramètres et maximiser L revient à minimiser χ^2.