Contrôle des connaissances du cours « Bruits et Signaux » de l'Ecole Doctorale d'Astrophysique.

Corrigé

Le mercredi 20 décembre 2000 de 14h à 16h amphi de l'IAP.

Le contrôle est noté sur 20, le barème est indiqué à la fin de chaque groupe de questions. Les exercices sont indépendants. Le polycopié et les notes de cours sont les seuls documents autorisés.

Loi exponentielle.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon indépendant et identiquement réparti (i.i.d) issu de la loi exponentielle de densité de probabilité : $f(x) = \theta \exp(-\theta x)$, définie pour $x > 0$ et où θ est un paramètre positif inconnu.

① Donnez un exemple de phénomène physique dont la mesure X obéit à cette loi.

② Que valent, en fonction de θ, la moyenne μ et la variance σ^2 de cette loi ?

③ Quelle est l'expression de l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ calculé suivant la méthode des moments ?

④ Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ?

⑤ Donner l'expression de l'information de Fisher $I_n(\theta)$ contenue dans l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, vis-à-vis de l'estimation de θ ?

(Rappel : $I_n(\theta) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{E}\{(\frac{\partial}{\partial\theta} \log L)^2\}$, cette expression peut se simplifier dans certains cas.)

⑥ Pensez-vous que l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ soit biaisé ? Justifiez rapidement votre réponse.

($1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ points.)

Corrigé.

❶ Le temps X qui sépare deux événements consécutifs d'un flux de Poisson suit la loi exponentielle. Ce peut être, par exemple, le temps écoulé entre les détections de deux photons idéaux (c'est-à-dire qui n'interférent pas).

❷ C'est une simple question de cours mais, si l'on tient à faire le calcul, une récurrence issue d'une intégration par partie montre que $\mu = 1/\theta$ et $\sigma_i^2 = 1/\theta^2$.

❸ Le moment empirique M vaut comme d'habitude $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. La méthode des moments consiste, en particulier, à identifier M à μ. Ce qui conduit à $M = 1/\theta$ et suffit à déterminer θ. Soit :

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \, .$$

Il est vrai que l'on aurait pu aussi utiliser les moments d'ordre deux et poser $S_n'^2 = 1/\theta^2$ ou $S_n^2 = 1/\theta^2$, ce qui aurait conduit à d'autres estimateurs. On préfère cependant les estimateurs qui sont calculés à partir des moments empiriques d'ordre le plus bas possible pour des raisons d'efficacité qui sont exposées dans le cours.

❹ On a :

$$L = \prod_{i=1}^{n} \theta \exp(-\theta x_i)\,,$$

$$\log L = n \log\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log L = -\frac{n}{\theta^2}\,.$$

On en tire l'estimateur du maximum de vraisemblance en posant :

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}\,.$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'un maximum car $(\log L)'' < 0$. On constate que l'estimateur du maximum de vraisemblance est identique à celui donné par la méthode des moments.

❺ Le domaine d'intégration des espérances à calculer (voir cours) ne dépend pas de θ. Par conséquent, l'information de Fisher est donnée par $\mathrm{E}\{-(\log L)''\}$, soit n/θ^2.

❻ En fait $\widehat{\theta}_n = 1/M$ où M est la moyenne arithmétique empirique et $\mathrm{E}\{M\} = \mu = 1/\theta$. Il n'y a aucune raison pour que $\mathrm{E}\{1/M\} = 1/\,\mathrm{E}\{M\}$ et donc que l'estimateur en question soit non-biaisé. Il y a même de bonnes raisons pour qu'il soit biaisé, ce que l'on peut voir par l'application de l'inégalité de Jensen (la fonction $y = 1/x$ est convexe) ou la formule de propagation des erreurs (voir cours p. 90).

Planète extrasolaire.

Soit une planète de rayon r en orbite circulaire autour d'une étoile de rayon R, le rayon de l'orbite est a. Ce système stellaire est observé depuis un point O situé à la distance D de l'étoile. L'orbite de la planète est vue par l'observateur situé en O sous la forme d'une ellipse dont les diamètres apparents sont respectivement α pour le grand axe et β pour le petit axe. Le diamètre apparent de l'étoile est 2Δ et celui de la planète est 2δ.

① Soit i l'angle polaire de l'observateur par rapport au système stellaire. Le plan de l'orbite est pris comme plan équatorial de telle façon que pour $i = 0$ ou $i = \pi$ l'orbite est vue sous forme d'un cercle et que pour $i = \pi/2$ elle est vue sous forme d'un segment de droite. Par ailleurs, on suppose que D est grand et que l'approximation : $\tan\theta = \sin\theta = \theta$ est valable pour tous les diamètres apparents.

Quelle est la condition pour qu'il y ait occultation de l'étoile par la planète ? Exprimez cette condition par rapport à la circularité apparente β/α.

② Le point d'observation O est situé uniformément sur la sphère céleste. Par là, on entend que la probabilité pour que O soit situé dans un angle solide Ω quelconque est égale à $\Omega/4\pi$.

Quelle est la fonction de répartition $F(i)$ de l'angle d'inclinaison i ?

③ Exprimez la circularité apparente $e = \beta/\alpha$ en fonction de l'inclinaison i. Quelle est alors la fonction de répartition $G(e)$ de la circularité apparente ?

④ Trouver la probabilité pour qu'un observateur situé au hasard et uniformément sur la sphère celeste soit dans une position telle qu'une occultation de l'étoile par la planète puisse se produire.

⑤ Il y a occultation lorsque l'observateur se trouve dans le cône de pénombre de la planète. Soit α le demi-angle au sommet de ce cône, donnez l'expression de $\sin\alpha$ en fonction des paramètres du système stellaire.

On suppose maintenant que $i = \pi/2$. Quelle est la probabilité pour que l'observateur soit le témoin d'une ocuultation au moment même où il braque son télescope vers l'étoile du système.

($1 + 1 + 2 + 1 + 2$ points.)

Corrigé.

❶ Il faut que β soit plus petit que $\Delta + \delta$ ou, ce qui revient au même :

$$\beta < \frac{R + r}{D}\,,$$
$$\frac{\beta}{\alpha} < \frac{R + r}{a}\,.$$

❷ On a $d\Omega = \sin i\, d\phi\, di$, et $F(i) = \Pr\{t \leq i\}$ d'où :

$$F(i) = \frac{1}{4\pi}\int_0^i dt \int_0^{2\pi} \sin t\, d\phi\,,$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^i \sin t\, dt = \tfrac{1}{2}(1 - \cos i)\,.$$

On constate que $F(i)$ est bien une fonction croissante de 0 à 1 lorsque i va de 0 à π.

❸ On a $\beta = \alpha|\cos i|$ d'où $e = |\cos i|$. Pour calculer $G(e)$, il faut faire attention car le changement de variable aléatoire $E = |\cos I|$ n'est pas bijectif, pour un e donné il y a deux inclinaisons solutions de $|\cos i| = e$. Par définition $G(e) = \Pr\{E \leq e\}$, c'est-à-dire $G(e) = \Pr\{i_1 \leq i \leq i_2\}$ avec $\cos i_1 = e$ et $\cos i_2 = -e$. Il vient :

$$G(e) = \Pr\{i_1 \leq i \leq i_2\} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos i_2) - \tfrac{1}{2}(1 - \cos i_1)\,,$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 + e) - \tfrac{1}{2}(1 - e)\,,$$
$$= e\,.$$

La loi suivie par e est donc une loi uniforme entre 0 et 1.

❹ On a vu plus haut qu'il y a occultation si $e < (R + r)/a$, ce qui arrive avec la probabilité $G((R + r)/a)$, soit :

$$\Pr\{\text{occultation possible}\} = \frac{R + r}{a}\,.$$

On retrouve facilement cette formule à l'aide d'un raisonnement géométrique très simple sur l'angle solide balayé par le cône d'ombre.

Pour le Soleil et Jupiter on a : $R = 7\,10^5$ km, $r = 7\,10^4$ km et $a = 7.8\,10^8$ km, d'où la probabilité cherchée égale dans ce cas à 10^{-3}.

❺ En fait la géométrie est similaire à celle évoquée à la question précédente. En considérant le cône de pénombre (cône interne), on obtient $\sin\alpha = R/a_1 = r/a_2$ avec $a = a_1 + a_2$. D'où :

$$\sin\alpha = \frac{R+r}{a} \approx \alpha\,,$$

et la probabilité d'occultation observée :

$$\Pr\{\text{occultation observée}|i = \pi/2\} = \frac{1}{\pi}\,\frac{R+r}{a}\,.$$

En multipliant ce nombre par la période P de la planète on obtient le temps de transit. Dans le cas de Jupiter $P = 4332.59$ jours et le temps de transit est de 33 heures. La photométrie de l'étoile serait diminuée de $(r/R)^2 \approx 1\%$ ce qui est détectable.

Lorsque l'inclinaison est i, on a le temps de transit :

$$\begin{aligned} T &= \frac{P}{\pi}\arcsin\Big[\frac{1}{\sin i}\sqrt{\Big(\frac{R+r}{a}\Big)^2 - \cos^2 i}\,\Big]\,, \\ &\approx \frac{P}{\pi}\arcsin\Big[\sqrt{\Big(\frac{R+r}{a}\Big)^2 - \cos^2 i}\,\Big]\,, \end{aligned}$$