

Modélisation numérique d'un disque d'accrétion autour d'un « trou noir »

Sujet proposé par D. Pelat (Observatoire de Meudon)

5 juin 2002

1 Introduction.

On observe dans l'univers des objets d'apparence ponctuelle et qui sont la source de très grandes quantités d'énergie, certaines étoiles doubles émettrices de rayons X et certains noyaux de galaxies sont des objets de ce type. Ces objets présentent de plus une variabilité de leur puissance rayonnée en fonction du temps. Les modèles classiques les plus efficaces, comme la fusion nucléaire, ne peuvent pas rendre compte des puissances émises qui, pour un noyau de galaxie par exemple, sont de l'ordre de 10^{40} watt.

Pour expliquer de tels phénomènes, on a fait appel à un modèle composé d'un trou noir entouré d'un disque de gaz en rotation quasi képlérienne. Les particules de matière attirées par le champ de gravitation du trou noir de masse M tombent en spirale lentement et une partie de l'énergie potentielle ainsi perdue est rayonnée. Pour que l'énergie ainsi produite soit la plus grande possible il faut que, à masse M égale, le puits de potentiel soit le plus profond possible et donc que l'objet central soit de rayon le plus petit possible. Les trous noirs sont les objets les plus compacts que nous connaissons et sont par conséquent les meilleurs candidats possibles. Dans notre étude nous envisagerons un trou noir de Schwarzschild, c'est-à-dire sans rotation, les trous noirs de Kerr, avec rotation, possèdent des puits de potentiel encore plus profonds mais demandent un traitement plus complexe car la relativité générale y intervient plus fortement. Afin de pouvoir rendre compte de la variabilité, nous devons bâtir un modèle dépendant du temps où certaines valeurs (la température et la densité) obéissent à des équations d'évolution. Ce travail s'inspire des résultats de R.E. Taam et D.N.C. Lin publiés dans leur article de 1984 [10].

2 Description physique du modèle.

Le modèle dépend de 6 paramètres : M , r_{\max} , \dot{M}_0 , α , X et Y que nous décrivons ci-dessous.

2.1 Les paramètres décrivant le trou noir.

Pour un trou noir de Schwarzschild il n'y a en fait qu'un seul paramètre qui le décrit c'est sa masse M ou, ce qui revient au même, son *rayon de Schwarzschild* dont l'expression est :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3.0 \text{ km} \frac{M}{M_\odot} . \quad (1)$$

Dans cette expression c est la vitesse de la lumière, G la constante de la gravitation et M_{\odot} est la masse du soleil ($1M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{33}$ g).

Notons simplement que pour décrire un trou noir de Kerr il faudrait un paramètre de plus : son moment cinétique.

2.2 Les paramètres décrivant le disque.

2.2.1 La géométrie du disque.

Le disque est décrit dans un espace repéré par les coordonnées cylindriques r, ϕ, z et le temps t . On suppose que la structure du disque est à symétrie cylindrique, par conséquent nous n'envisagerons que les équations portant sur la coordonnée radiale r , le modèle est à une dimension (1-D).

La partie du disque qui nous intéresse s'étend radialement de r_{\min} à r_{\max} , La valeur de r_{\min} est imposée par la théorie de la relativité générale qui nous apprend qu'en deçà de $r = 3r_s$, pour un trou noir de Schwarzschild, le disque est dynamiquement instable et ne peut donc plus exister en tant que tel. La valeur de r_{\max} doit être suffisamment petite pour que les hypothèses physiques faites plus bas (essentiellement : que le gaz est complètement ionisé) restent valables de r_{\min} à r_{\max} . On constatera que pour des taux d'accrétion \dot{M}_0 supérieurs à une certaine limite, des ondes de matière se propagent radialement vers les grands r tout en s'amortissant. Il faut alors que r_{\max} soit suffisamment grand pour que ces ondes s'amortissent avant d'atteindre cette distance, sinon l'évolution du disque interférerait avec les conditions physiques imposées en r_{\max} ce qui rendrait le problème impossible à résoudre simplement. L'ajustement de r_{\max} à une valeur raisonnable résulte d'expériences numériques où l'on donne à r_{\max} des valeurs arbitraires jusqu'à l'obtention d'un modèle cohérent, pour commencer nous prendrons $r_{\max} = 100r_s$.

2.2.2 Les paramètres de l'accrétion.

La quantité de matière par unité de temps apportée au disque en r_{\max} par le milieu extérieur ou *taux d'accrétion* est \dot{M}_0 . Par ailleurs, la théorie physique appliquée au disque (théorie de Shakura et Sunyaev [9]) dépend d'un paramètre phénoménologique α qui est inconnu mais probablement assez petit en tout cas inférieur ou égal à un. Ce paramètre gouverne le taux de production d'énergie par friction de la matière sur elle-même.

2.2.3 La composition chimique.

La composition chimique de la matière constituant le disque est représentée par trois proportions X, Y et Z ($X + Y + Z = 1$). Ce sont respectivement les fractions des masses d'Hydrogène, d'Hélium et des éléments lourds souvent appelés « métaux » par les astrophysiciens. On fixe plus ou moins arbitrairement ces valeurs à celles prises à la surface du soleil :

$$X = 0.70, \quad Y = 0.28, \quad Z = 0.02. \quad (2)$$

2.3 Les équations gouvernant la structure du disque.

L'état du disque à l'instant t et au voisinage du point r est principalement décrit par une température caractéristique T (qui est ici la température au plan équatorial $z = 0$);

sa densité de surface Σ et son taux d'accrétion local \dot{M} . Les quantités T , Σ et \dot{M} sont fonctions de r et t . Pour les établir, il faut résoudre un ensemble d'équations dont deux (11) et (14a) sont des équations aux dérivées partielles. On donne ci-dessous la liste de toutes les variables décrivant l'état du disque ainsi que les équations qui les relient entre elles. Il ne s'agit ci-dessous que d'un catalogue d'équations auquel on pourra se référer aisément, on donnera plus loin, §2.4 page 6, plus de détails sur la manière d'obtenir ces équations.

2.3.1 La vitesse angulaire Ω .

Sous hypothèse que les orbites des particules de matière sont circulaires et obéissent aux lois de Képler, on a :

$$\Omega = \left(\frac{GM}{r^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

G est la constante de la gravitation, elle vaut $G = 6.6732 \cdot 10^{-8}$ cgs.

2.3.2 La masse atomique moyenne μ .

C'est la masse moyenne, rapportée à la masse du proton¹, des particules (noyaux et électrons) constituant le gaz. On a pour un gaz complètement ionisé :

$$\mu = \frac{1}{(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z)}, \quad (4)$$

Avec $X = 0.70$, $Y = 0.28$ et $Z = 0.02$, on obtient $\mu \approx 0.62$.

2.3.3 La pression P et l'équation d'état.

La pression totale P se décompose en pression gazeuse due aux particules : P_{gaz} et pression de radiation due aux photons : P_{rad} . On a :

$$P = P_{\text{gaz}} + P_{\text{rad}}, \quad (5a)$$

$$P_{\text{gaz}} = \frac{\rho}{\mu m_p} kT, \quad P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4. \quad (5b)$$

Dans ces expressions : ρ est la densité moyenne en $[\text{g cm}^{-3}]$; T est la température du gaz; k est la constante de Boltzmann; m_p la masse du proton; a est la constante de radiation, elle vaut $a = 7.564 \cdot 10^{-15}$ cgs. On a $k/m_p = 8.31434 \cdot 10^7$ cgs.

2.3.4 L'indicateur de pression β .

Le paramètre β est défini classiquement comme le rapport de la pression du gaz à la pression totale :

$$\beta = \frac{P_{\text{gaz}}}{P}. \quad (6)$$

Pour $\beta = 1$, c'est la pression du gaz qui domine et pour $\beta = 0$, c'est la pression de radiation.

¹En principe rapportée à $1/12$ de la masse atomique du carbone ^{12}C .

2.3.5 La vitesse du son c_s .

C'est la vitesse des perturbations adiabatiques de densité, on a :

$$c_s = \left(\frac{\Gamma_1 P}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

Γ_1 est une quantité qui dépend de β et qui vaut $5/3$ lorsque $\beta = 1$ et $4/3$ lorsque $\beta = 0$. Pour simplifier on ignore cette constante et on pose $\Gamma_1 = 1$.

2.3.6 La demi-hauteur du disque H .

Quand on traite l'équilibre hydrostatique vertical du disque on trouve :

$$H = \frac{c_s}{\Omega}. \quad (8)$$

2.3.7 La densité volumique ρ .

Il s'agit de la densité moyenne de la matière dans le disque en $[\text{g cm}^{-3}]$:

$$\Sigma = 2\rho H. \quad (9)$$

2.3.8 La viscosité ν .

ν est la viscosité cinématique, d'origine turbulente, du gaz en $[\text{cm}^2 \text{s}^{-1}]$

$$\nu = \frac{2}{3}\alpha c_s H. \quad (10)$$

α est un paramètre phénoménologique dont la valeur est inconnue.

2.3.9 La densité de surface Σ .

C'est la densité intégrée suivant z : elle s'exprime en $[\text{g cm}^{-2}]$, son évolution est sujette à une équation de type parabolique « proche » d'une équation de diffusion :

$$\boxed{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{1/2}) \right\}}. \quad (11)$$

2.3.10 La vitesse locale d'accrétion v .

Il s'agit de la composante radiale de la vitesse de la matière, elle est négative si la matière est accrétée. On a :

$$v = -\frac{3}{\Sigma r^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{1/2}). \quad (12)$$

2.3.11 Le taux d'accrétion \dot{M} .

Il s'agit d'un taux local qui dépend donc de r , il est *positif* si la matière est accrétée.

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma v. \quad (13)$$

2.3.12 La température T .

C'est ici la température du plan équatorial du disque, elle est soumise à l'équation thermique :

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} = Q^+ - Q^- + Q_{\text{adv}} \quad (14a)$$

C_V est la capacité calorifique à volume constant par unité de masse du mélange de gaz et de radiation, Q^+ est un terme de chauffage, c'est la chaleur engendrée par la friction par unité de masse et par unité de temps :

$$Q^+ = \frac{9}{4} \nu \Omega^2, \quad (14b)$$

les unités de Q^+ , Q^- et Q_{adv} sont des $[\text{cm}^2 \text{s}^{-3}]$,

Q^- est un terme de refroidissement, c'est la chaleur perdue par radiation

$$\begin{aligned} Q^- &= 2 \frac{F_z}{\Sigma} + 2 \frac{H}{\Sigma r} \frac{\partial}{\partial r} r F_r, \\ &\approx 2 \frac{F_z}{\Sigma}, \end{aligned} \quad (14c)$$

F_z est le flux radiatif s'échappant à la surface du disque, F_r est le flux radiatif s'échappant ou rentrant dans la direction radiale du disque. Le premier terme dépendant de F_z est dominant par rapport au second.

Q_{adv} est la chaleur apportée ou emportée par la matière en mouvement (terme d'advection) :

$$Q_{\text{adv}} = C_V \left[(\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\Sigma} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \right) - v \frac{\partial T}{\partial r} \right], \quad (14d)$$

où Γ_3 est un exposant adiabatique, on a :

$$C_V = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{12(\gamma_g - 1)(1 - \beta) + \beta}{(\gamma_g - 1)\beta}, \quad (14e)$$

$$C_V(\Gamma_3 - 1) = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{4 - 3\beta}{\beta}, \quad (14f)$$

γ_g est le rapport des capacités calorifiques du gaz, il est égal à 5/3 pour un gaz parfait monoatomique, pour simplifier on a posé $\mathcal{R} = k/m_p$.

2.3.13 Le flux radiatif F_z .

Il dépend de la profondeur optique effective : τ_{eff} qui traduit approximativement le nombre d'interactions que subit un photon entre le plan équatorial et la surface du disque où il est libéré. Dans le cas « optiquement épais » ($\tau_{\text{eff}} \gg 1$) on utilise l'approximation dite de diffusion ; dans le cas « optiquement mince » ($\tau_{\text{eff}} \ll 1$) on utilise une autre approximation.

$$F_z = \begin{cases} \frac{2acT^4}{3(\kappa_{\text{ff}} + \kappa_e)\Sigma}, & \text{si } \tau_{\text{eff}} \geq 1; \\ \epsilon_{\text{ff}} AH, & \text{si } \tau_{\text{eff}} < 1. \end{cases} \quad (15a)$$

c est la vitesse de la lumière. La profondeur optique effective est donnée par :

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\kappa_e \kappa_{\text{ff}})^{\frac{1}{2}} \Sigma \quad (15b)$$

κ_e est l'opacité attachée au processus de diffusion des photons sur les électrons libres (diffusion Thomson) et κ_{ff} est l'opacité attachée à l'absorption de photons par freinage des électrons se déplaçant dans le champ coulombien des noyaux chargés (transitions free-free ou bremsstrahlung). On a en unités cgs :

$$\kappa_e = 0.2(1 + X) \text{ cm}^2/\text{g} \approx 0.34 \text{ cm}^2/\text{g} \quad (15c)$$

$$\kappa_{\text{ff}} = 6.13 \times 10^{22} \rho T^{-\frac{7}{2}} \text{ cm}^2/\text{g}, \quad (15d)$$

ce sont des sections efficaces par unité de masse.

Dans le cas optiquement mince nous avons besoin de l'émissivité free-free ϵ_{ff} (taux de pertes par rayonnement de freinage) et du coefficient A dit d'amplification Compton que, pour simplifier, nous prendrons égal à un. On a :

$$\epsilon_{\text{ff}} = 6.22 \cdot 10^{20} \rho^2 T^{\frac{1}{2}} \text{ cgs}, \quad A = 1. \quad (15e)$$

2.4 éclaircissements succincts.

Les considérations de ce chapitre sont destinées aux esprits curieux de savoir « d'où viennent les équations ». Dans une première lecture on peut l'omettre et passer directement au chapitre 3 page 14.

2.4.1 La loi de Képler.

Au voisinage d'un « trou noir » le champ de gravitation est gouverné par la théorie de la relativité générale. La loi de Képler, qui est une conséquence de la théorie newtonienne, n'y est *a priori* plus valable. Cependant, pour des orbites *circulaires* il se trouve que cette loi s'applique encore jusqu'à la limite de $r = 3r_s$ (voir, Misner, Thorne, Wheeler [6]), où r_s est le rayon de Schwarzschild dont l'expression est donnée en (1). En deçà de cette limite les orbites ne sont plus stables et la matière tombe sur le trou noir.

Il faut noter qu'il y a une certaine contradiction à supposer que la matière est accrétée vers le trou noir alors que ses orbites sont supposées circulaires. Cette approximation se justifie dans le disque, où la vitesse tangentielle v_ϕ est très supérieure à la vitesse d'accrétion v , mais elle pose problème au bord interne (en $r_{\text{min}} = 3r_s$) où elle conduit à un certain arbitraire quand à la condition au contour qu'il faut y imposer.

2.4.2 La pression du gaz.

La pression d'un gaz ionisé se décompose en celle due aux ions et celle due aux électrons. On suppose que la température des ions et des électrons est la même.

Pour les ions, il faut tenir compte des pressions partielles des noyaux d'hydrogène de masse $\approx 1 m_p$, d'hélium de masse $\approx 4 m_p$ et des métaux (surtout de l'oxygène du carbone et de l'azote). Prenons pour les métaux, et à titre d'exemple, seulement de l'oxygène de masse $\approx 16 m_p$, il vient :

$$\begin{aligned} P_{\text{ion}} &= X \frac{k\rho T}{m_p} + Y \frac{k\rho T}{4m_p} + Z \frac{k\rho T}{16m_p}, \\ &= \frac{k\rho T}{m_p \mu_{\text{ion}}}, \quad \text{avec} \\ \mu_{\text{ion}} &= \frac{1}{X + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{16}Z}. \end{aligned}$$

Dans ces expressions k est la constante de Boltzmann et m_p est la masse du proton.

On suppose que l'on a affaire à un plasma complètement ionisé, les électrons proviennent alors des atomes à raison d'un électron par atome d'hydrogène, de deux par atome d'hélium et de huit par atome d'oxygène. Il vient par conséquent (m_e est la masse de l'électron) :

$$P_e = \frac{k\rho_e T}{m_e}, \quad \text{avec} \quad \rho_e = m_e \left(\frac{X\rho}{m_p} + 2\frac{Y\rho}{4m_p} + 8\frac{Z\rho}{16m_p} \right), \quad \text{d'où}$$

$$P_e = \frac{k\rho T}{m_p \mu_e}, \quad \text{avec} \quad \mu_e = \frac{1}{X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z}.$$

On retrouve alors la masse atomique moyenne à partir de $P_{\text{gaz}} = P_{\text{ion}} + P_e$ qui implique $\mu^{-1} = \mu_{\text{ion}}^{-1} + \mu_e^{-1}$, soit :

$$\mu^{-1} = \left(X + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{16}Z \right) + \left(X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z \right),$$

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{9}{16}Z}.$$

Cette expression ne diffère que très légèrement de notre formule (4) où les « métaux » ne sont pas supposés être uniquement composés d'oxygène.

2.4.3 Les équations d'état.

Les équations qui établissent une relation entre la pression et la température sont connues sous le nom d'*équations d'état*. Celles que nous donnons supposent que les gaz d'ions et d'électrons sont des gaz parfaits, ce qui implique en particulier que l'état d'ionisation du gaz ne change pas et qu'il reste complètement ionisé. De plus le gaz de photons est supposé être à l'équilibre avec la matière à la température T , autrement dit on suppose que la matière est optiquement épaisse ($\tau_{\text{eff}} \gg 1$) vis-à-vis des interactions avec les photons. Ceci implique que le spectre énergétique du gaz de photons est celui du *corps noir*.

2.4.4 La vitesse du son.

On doit considérer une onde sonore qui traverse un milieu composé de gaz *et* de rayonnement. Le coefficient adiabatique pertinent est Γ_1 qui vaut γ_g si la pression est dominée par la pression du gaz et $4/3$ si c'est la pression de radiation qui domine. Dans le cas général on a (voir Cox et Guili §9.17 [1] ou Kippenhahn et Weigert §13.2 [4]) :

$$\Gamma_1 = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{\text{adiab.}} = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma_g - 1)}{12(1 - \beta)(\gamma_g - 1) + \beta},$$

où $\gamma_g = 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique.

2.4.5 L'équilibre hydrostatique.

On suppose que le disque est à l'équilibre hydrostatique le long de l'axe z , ce qui est justifié si les mouvements selon cet axe sont subsoniques. L'équation d'équilibre hydrostatique est : $\text{grad}P = -\rho \text{grad}\Phi$, où Φ est le potentiel gravitationnel. Si, entre r_{min} et r_{max} , on peut négliger l'effet de la composante du champ de gravitation provenant de la masse du disque (auto-gravitation) devant celle provenant de la masse

centrale M , le potentiel Φ s'écrit alors : $\Phi = -GM/D$, où $D = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ est la distance du point considéré au centre du système. Ce qui donne suivant l'axe des z :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{GM}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si le disque est mince $z^2 \ll r^2$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{GM}{r} \left(1 - \frac{z^2}{2r^2}\right) = \frac{GM}{r} \left(-\frac{2z}{2r^2}\right), \\ &= -\frac{GM}{r^3} z = -\Omega^2 z. \end{aligned}$$

Remarquons qu'un tel potentiel a pour effet de « rappeler » la matière vers le plan équatorial alors que la pression a l'effet inverse.

Supposons que la densité ρ soit constante, il vient en intégrant de 0 à H :

$$P(H) - P(0) = -\Omega^2 \rho \frac{H^2}{2}.$$

La hauteur H est définie de façon à ce que la pression $P(H)$ peut y être considérée comme nulle et $P(0)$ est la pression centrale que l'on note P_0 . On trouve alors $P_0 = \frac{1}{2}\Omega^2 \rho H^2$ qui conduit à notre formule (8) au facteur $(2/\Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \approx 1$ près, et en considérant que P représente la pression centrale.

à propos de la signification qu'il convient de donner à des valeurs comme P remarquons qu'il importe peu de savoir s'il s'agit de la pression centrale ou de la pression moyenne. En effet en intégrant cette fois-ci de 0 à z on obtient :

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right). \quad (16)$$

Cette formule nous permet de calculer la pression moyenne $\langle P \rangle$ dans le disque. On obtient $\langle P \rangle = \frac{2}{3}P_0$ qui ne diffère, en effet, que très peu de P_0 .

2.4.6 Les densités de matière.

Nous introduisons la densité volumique ρ en $[\text{g}/\text{cm}^3]$ et la densité de surface Σ en $[\text{g}/\text{cm}^2]$. Par définition Σ est l'intégrale de la densité volumique dans l'épaisseur du disque, on a :

$$\Sigma = 2 \int_0^H \rho(z) dz = 2H \langle \rho \rangle.$$

Si $\rho(z)$ est constant dans l'épaisseur du disque on a $\langle \rho \rangle = \rho$. Si $\rho(z)$ n'était pas constant, il faudrait interpréter ρ comme représentant une certaine valeur moyenne et il apparaîtrait alors un facteur de l'ordre de l'unité dans nos formules. Nous négligeons de tels facteurs devant l'incertitude pesant sur le paramètre α .

2.4.7 La viscosité.

Les processus de frottement internes au disque sont dominés par le contact des anneaux képlériens adjacents. Dans ces conditions la seule composante du tenseur des contraintes visqueuses à considérer est $\sigma'_{r\phi}$ (on peut admettre que les 5 autres composantes de ce tenseur sont nulles devant $\sigma'_{r\phi}$). La composante σ'_{ij} du tenseur est le

flux d'impulsion dans la direction i à travers une surface normale à l'axe j . Les unités de σ' sont donc des $[\text{g cm}^{-1}\text{s}^{-2}]$. En coordonnées cylindriques et pour un fluide incompressible ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) on a (voir, Landau et Lifchitz §15 [5]) :

$$\sigma'_{r\phi} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right),$$

où η est la viscosité dynamique : $\eta = \rho\nu$. Les unités cgs de η sont des $[\text{g s}^{-1}\text{cm}^{-1}]$ et pour ν des $[\text{cm}^2\text{s}^{-1}]$.

Dans notre modèle à une dimension v_r n'admet pas de dépendance azimutale d'où $\partial v_r / \partial \phi = 0$; par ailleurs on a $v_\phi = r\Omega$ et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(\Omega r) = r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \Omega \quad \text{d'où} \\ \sigma'_{r\phi} &= \eta r \frac{\partial \Omega}{\partial r}. \end{aligned}$$

La force visqueuse exercée à l'interface entre deux anneaux adjacents du disque est l'impulsion tangentielle totale qui passe par unité de temps à travers la surface $2\pi r \times 2H$ qui les sépare. On introduit la tension visqueuse $W_{r\phi}$ entre ces deux anneaux comme étant :

$$W_{r\phi} = -2 \int_0^H \sigma'_{r\phi} dz = -2\eta H r \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad (17)$$

de façon à ce que la force visqueuse s'écrive $2\pi r W_{r\phi}$. Le signe $-$ a été introduit afin que $W_{r\phi}$ soit positif. On trouve dans le cas képlérien :

$$W_{r\phi} = 3\eta H \Omega.$$

La valeur de ν (et donc de η) est inconnue. Si l'on prend des valeurs correspondant à des mesures portant sur des fluides classiques, on trouve une viscosité dite *moléculaire* qui va, par exemple, de $0.0012 \text{ cm}^2/\text{s}$ pour le mercure à $6.8 \text{ cm}^2/\text{s}$ pour la glycérine. Ces valeurs sont bien trop petites pour rendre compte de la dissipation d'énergie attendue dans les disques d'accrétion où il faut invoquer des viscosités $\nu \gtrsim 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}$, il faut alors faire appel à une autre forme de viscosité : la viscosité *turbulente*. Dans cette théorie la friction est engendrée par le contact des tourbillons prenant naissance dans le fluide lorsque l'écoulement devient turbulent. Dans ces conditions, et en l'absence de champ magnétique, la viscosité ν est donnée par $\nu \approx v_t l_t$, où v_t et l_t sont respectivement la vitesse et la dimension caractéristique de ces tourbillons. On ne connaît pas v_t mais on suppose que les mouvements restent subsoniques d'où $v_t \leq c_s$, l_t n'est pas plus connu mais si l'on suppose que les tourbillons ont plus ou moins une symétrie sphérique, ils ne peuvent pas être plus grands que l'épaisseur du disque d'où $l_t \leq 2H$.

La théorie des disques α de Shakura et Sunyaev consiste à paramétriser notre ignorance en posant $\nu = \frac{2}{3} \alpha c_s H$. Ce point du modèle est le plus criticable mais certaines observations de disques d'accrétion autour d'étoiles doubles émettrices de rayons X (binaires X) ont confirmé la théorie de Shakura et Sunyaev.

2.4.8 L'équation d'évolution de la densité de matière.

Pour établir les équations (11) et (12), il faut partir des équations de conservation de la masse (ou équation de continuité) et de conservation du moment cinétique ; afin

d'alléger l'exposé nous ne démontrerons ces deux équations qu'un peu plus loin (voir §2.5). Elles s'écrivent :

$$r \frac{\partial}{\partial t} \Sigma + \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v r) = 0, \quad (\text{pour la masse}),$$

$$r^2 \Omega \frac{\partial}{\partial t} \Sigma + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r^3 \Omega v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^3 \frac{\partial}{\partial r} \Omega), \quad (\text{pour le moment cinétique}).$$

On remarque que dans ces deux équations la vitesse n'intervient que par v et son gradient $\partial v / \partial r$. Introduisons alors les notations $u = \Sigma v r$, $(') = \frac{\partial}{\partial r}$ pour la dérivation par rapport à l'espace et $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}$ pour la dérivation par rapport au temps. Les équations s'écrivent maintenant :

$$r \dot{\Sigma} + u' = 0,$$

$$r^2 \Omega \dot{\Sigma} + \frac{1}{r} (u r^2 \Omega)' = \frac{1}{r} (\nu \Sigma r^3 \Omega')', \quad \text{soit encore}$$

$$r^2 \Omega \dot{\Sigma} + r \Omega u' + \frac{1}{r} (r^2 \Omega)' u = \frac{1}{r} (\nu \Sigma r^3 \Omega')'.$$

En tirant u' de la première équation et en l'injectant dans la dernière on trouve :

$$u = \frac{\frac{1}{r} (\nu \Sigma r^3 \Omega')' - r^2 \Omega \dot{\Sigma} + r^2 \Omega \dot{\Sigma}}{\frac{1}{r} (r^2 \Omega)'} = \frac{(\nu \Sigma r^3 \Omega')'}{(r^2 \Omega)'}. \quad (18)$$

On remplace alors u par cette valeur dans l'équation de conservation de la masse, il vient :

$$r \dot{\Sigma} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{(\nu \Sigma r^3 \Omega')'}{(r^2 \Omega)'} = 0, \quad \text{soit plus explicitement :}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{(r^2 \Omega)'} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^3 \Omega')' \right\}.$$

Dans le cas képlérien on a :

$$r^3 \Omega' = -\frac{3}{2} r^2 \Omega = -\frac{3}{2} (GM)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et}$$

$$(r^2 \Omega)' = \frac{1}{2} r \Omega = \frac{1}{2} (GM)^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}}.$$

D'où on tire finalement l'équation (11) ci-dessus :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{\frac{1}{2}}) \right\}.$$

2.4.9 La vitesse d'accrétion.

On obtient l'équation (12) sur la vitesse d'accrétion en explicitant l'équation (18) précédente dans le cas képlérien, il vient :

$$\Sigma v r = \frac{(\nu \Sigma (-\frac{3}{2} r^{\frac{1}{2}}))'}{\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}}} = -3 r^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{\frac{1}{2}}), \quad \text{soit :}$$

$$v = -\frac{3}{\Sigma r^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{\frac{1}{2}}).$$

2.4.10 Le taux d'accrétion.

Le taux d'accrétion \dot{M} est une fonction de r , c'est la quantité de matière qui passe à travers la surface latérale du cylindre de rayon r et de hauteur $2H$ par unité de temps. On a : $dM = 2\pi r v dt \int_{-H}^{+H} \rho(z) dz = 2\pi r v dt 2H \langle \rho \rangle = 2\pi r v \Sigma dt$. Ce qui donne $\dot{M} = 2\pi r \Sigma v$. Dans le cas stationnaire on doit trouver $\dot{M}(r) = \dot{M}_0$.

2.4.11 L'équation thermique.

Pour établir l'équation thermique, on part de la relation thermodynamique (voir Cox et Guili §9.14 [1]) exprimant l'accroissement de chaleur spécifique (par gramme) dQ en fonction de T et ρ :

$$dQ = C_V dT - T C_V (\Gamma_3 - 1) \frac{d\rho}{\rho},$$

où C_V est la chaleur spécifique à volume constant et Γ_3 un indice adiabatique :

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V, \quad \Gamma_3 - 1 = \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_{\text{adiab.}}$$

Dans toutes les expressions ci-dessus, comme c'est la règle en hydrodynamique, l'opérateur d s'entend « en suivant le mouvement », c'est-à-dire :

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) dt, \quad \text{soit en 1D} \quad d = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) dt.$$

Le calcul de C_V et Γ_3 est un peu compliqué du fait que l'on doit considérer un mélange de radiation et de gaz, ce qui se traduit par l'apparition du paramètre β . Les expressions données en (14e) et (14f) sont pour un mélange de radiation de corps-noir et de gaz parfait, les unités sont par unité de masse (par gramme).

Dans la résolution numérique on s'intéresse à l'évolution du disque dans le temps dt d'un volume fixe autour d'un point fixe, il faut alors calculer le bilan thermique par unité de temps et de volume, soit : $\rho dQ/dt$. On intègre cette équation suivant z :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^H \rho \frac{dQ}{dt} dz &= 2 \int_0^H \rho C_V \frac{dT}{dt} dz - 2 \int_0^H \rho C_V (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz, \\ &= \Sigma \langle C_V \frac{dT}{dt} \rangle - \langle C_V (\Gamma_3 - 1) T \rangle \frac{d}{dt} 2 \int_0^H \rho dz, \\ &= \Sigma \langle C_V \frac{dT}{dt} \rangle - \langle C_V (\Gamma_3 - 1) T \rangle \frac{d\Sigma}{dt}. \end{aligned}$$

Finalement on fait l'hypothèse que ces diverses valeurs moyennes ne diffèrent pas trop d'une valeur caractéristique, la valeur centrale par exemple. D'où on tire l'équation d'évolution de la température :

$$C_V \frac{dT}{dt} - C_V (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{\Sigma} 2 \int_0^H \rho \frac{dQ}{dt} dz, \quad (19)$$

où cette fois-ci T , C_V et Γ_3 désignent les valeurs pour $z = 0$. Il reste à calculer le membre de droite de l'équation précédente que l'on écrit $Q^+ - Q^-$. Les quantités Q^+ et Q^- sont représentées respectivement les taux de chauffage et de refroidissement générés dans le disque par unité de masse. On négligera dans le calcul du bilan thermique les contributions dues à la conduction et à la convection.

Le chauffage est dû à la dissipation irréversible de chaleur par friction. Le taux de dissipation de chaleur D par unité de volume est donné par (voir, Landau et Lifchitz §16 [5]) :

$$D(r) = \sum_{ik} \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} .$$

Dans le cas d'un fluide incompressible ce taux s'écrit :

$$D(r) = \frac{\eta}{2} \sum_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 .$$

En coordonnées cylindriques et dans le cas où seul $\sigma'_{r\phi}$ est dominant on trouve :

$$D(r) = \eta \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 .$$

Soit en tenant compte de $\eta = \nu \rho$ et en intégrant sur z :

$$\begin{aligned} D(r) &= 2 \int_0^H \nu \rho \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 dz , \\ &\approx \nu \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 2 \int_0^H \rho dz , \\ &\approx \nu \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \Sigma . \end{aligned}$$

Dans le cas képlérien $r\Omega' = \Omega(\partial \ln \Omega / \partial \ln r) = \Omega(-3/2)$, d'où Q^+ ($Q^+ = D/\Sigma$) :

$$Q^+ = \frac{9}{4} \nu \Omega^2 .$$

Ce qui est bien l'équation (14b).

La matière se refroidit en émettant un flux (dit radiatif) de photons. On ne considèrera ici que le flux qui s'échappe à la surface du disque, on négligera celui qui passe d'un anneau à un autre dans l'épaisseur du disque. Cette approximation se justifie du fait que le disque est géométriquement mince et que le flux *net* (c'est-à-dire en tenant compte du flux rentrant et sortant) est à plus forte raison négligeable.

Pour le calcul du refroidissement, on n'évaluera pas l'intégrale apparaissant dans le membre de droite de l'équation (19), un tel calcul fait l'objet de la théorie du transfert de rayonnement qui est esquissée ci-après. On constatera simplement qu'au « bout du compte », une colonne de matière émet de la lumière à un certain taux par unité de surface (un flux) et que c'est comme cela que la matière perd de l'énergie.

Soit F_z le flux émis par unité de surface du disque, le disque possède deux faces d'où le flux total est $2F_z$.

2.4.12 Calcul du flux radiatif F_z .

Le calcul du flux radiatif émergeant par intégration dans l'épaisseur du disque des processus d'émission et d'absorption des photons, fait l'objet de la théorie du transfert de rayonnement. Il s'agit d'une branche assez complexe de la physique, qu'il n'est pas question d'aborder ici. Cependant, on obtient de bonnes approximations dans le cas optiquement épais.

Sous hypothèse que la profondeur optique τ_{eff} est grande (cas optiquement épais) et que la matière est à l'équilibre thermodynamique local, le flux en z est donné par l'*approximation de diffusion* (voir Rybicki et Lightman §1.8 [8]) :

$$F_z(z) = -\frac{4acT^3}{3\kappa_R\rho} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{ac}{3\kappa_R\rho} \frac{\partial T^4}{\partial z}, \quad (20)$$

où κ_R est l'opacité moyenne de Rosseland (il s'agit d'une moyenne sur la fréquence des photons). Sans entrer dans les détails, disons que lorsque deux processus sont en concurrence, ici l'absorption free-free et la diffusion élastique des photons sur les électrons libres, on prend habituellement la somme des opacités moyennes en tant qu'opacité moyenne de Rosseland. C'est-à-dire :

$$\kappa_R = \kappa_e + \kappa_{\text{ff}}.$$

L'expression de κ_{ff} donnée en (15d) correspond au cas d'un rayonnement des électrons dans le champ d'ions à l'équilibre thermique. On parle alors de rayonnement free-free *thermique*.

Pour estimer $F_z(H)$ il faut calculer le gradient de T^4 en H , nous l'estimerons par un gradient moyen :

$$\frac{\partial T^4}{\partial z} \approx \frac{T^4(H) - T^4(0)}{H - 0} \approx -\frac{T^4(0)}{H},$$

d'où l'approximation de F_z :

$$F_z = \frac{ac}{3\kappa_R\rho H} T^4 = \frac{2acT^4}{3(\kappa_e + \kappa_{\text{ff}})\Sigma},$$

qui est bien notre équation (15a) dans le cas optiquement épais.

Le cas optiquement mince est plus difficile à traiter car à peu près toutes les hypothèses simplificatrices faites ici et nombre d'équations que nous avons établies ne sont plus valables (par exemple l'hypothèse de disque mince, la formule de la pression de radiation etc...), il faut entièrement reconsidérer le problème. Nous utiliserons, pour le cas optiquement mince, la formule donnée par Illiaronov et Sunyaev [3] dont l'effet de bloquer (artificiellement d'ailleurs) l'évolution du disque aux profondeurs optiques $\tau_{\text{eff}} = 1$.

2.5 Les équations de conservation.

Nous allons donner des démonstrations approchées en considérant que le disque est d'épaisseur nulle.

2.5.1 Conservation de la masse.

La variation de masse ΔM dans le temps Δt de l'anneau compris entre r et $r + \Delta r$ s'écrit $\Delta M = M^+ - M^-$ avec : $M^+ = \dot{M}(r + \Delta r)\Delta t$ et $M^- = \dot{M}(r)\Delta t$. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta M}{\Delta t} &= \dot{M}(r + \Delta r) - \dot{M}(r), \\ 2\pi r \Delta r \frac{\Delta \Sigma}{\Delta t} &= \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} \Delta r + O(\Delta r)^2, \\ 2\pi r \frac{\Delta \Sigma}{\Delta t} &= \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} + O(\Delta r). \end{aligned}$$

Soit, en considérant la limite $\lim_{\Delta t, \Delta r \rightarrow 0}$:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \dot{M}}{\partial r}.$$

Ce qui, en utilisant $\dot{M} = -2\pi r \Sigma v$, s'écrit :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v) = 0.$$

2.5.2 Conservation du moment cinétique.

L'anneau de matière compris entre r et $r + \Delta r$ gagne ou perd du moment cinétique dans le temps Δt sous l'effet de deux processus : (i) par transport à travers ses frontières de matière possédant du moment cinétique et (ii) par le jeu des forces visqueuses exercées à ces mêmes frontières par les anneaux adjacents. Soit ΔJ la variation de moment cinétique dans ce temps Δt , elle s'écrit alors : $\Delta J = (K(r) - K(r + \Delta r)) + (G(r) - G(r + \Delta r))$, où : $K(r)$ est le moment cinétique reçu ou cédé en r par l'anneau du fait du transport de matière, et $G(r)$ est le moment cinétique gagné ou perdu par friction visqueuse au contact de l'anneau tournant plus vite ou moins vite que lui-même. On a :

$$\begin{aligned} K(r) &= 2\pi r v(r) \Delta t \Sigma(r) \Omega(r) r^2, \\ G(r) &= 2\pi r W_{r\phi}(r) r \Delta t, \end{aligned}$$

où $W_{r\phi}$ est la tension visqueuse entre les anneaux adjacents, ce terme vaut $-2\eta H r \Omega'$ d'après l'équation (17) et $W_{r\phi} = -\nu \Sigma r \Omega'$ en tenant compte de $\Sigma = 2\rho H$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J}{\Delta t} &= -\Delta r \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r v \Sigma \Omega r^2) + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r v \Sigma r \Omega' r) + O(\Delta r)^2, \\ \Omega r^2 2\pi r \Delta r \frac{\Delta \Sigma}{\Delta t} &= -\Delta r \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r v \Sigma \Omega r^2) + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r v \Sigma r \Omega' r) + O(\Delta r)^2, \\ \Omega r^2 r \frac{\Delta \Sigma}{\Delta t} &= -\frac{\partial}{\partial r} (r v \Sigma \Omega r^2) + \frac{\partial}{\partial r} (r v \Sigma r \Omega' r) + O(\Delta r). \end{aligned}$$

On obtient l'équation de conservation du moment cinétique par passage à la limite :

$$r^2 \Omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r^3 \Omega v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r}).$$

3 Analyse du système d'équations.

Dans la formulation du problème exposée ci-dessus le nombre d'inconnues est de 13, soient : $\Omega, \mu, P, \beta, c_s, H, \rho, \nu, \Sigma, v, \dot{M}, T$ et F_z les inconnues. Le nombre d'équations est également de 13, le système est donc fermé et il peut, en principe, être résolu. Dix de ces équations sont de simples équations algébriques, l'équation (12) portant sur la vitesse d'accrétion est une simple dérivée et les deux restantes (11) et (14a) sont des équations aux dérivées partielles de type parabolique, elles exigent un traitement particulier.

3.1 La condition initiale.

Le système d'équations n'admet pas de conditions initiales où $\Sigma(r, 0)$ et $T(r, 0)$ sont nuls. Il faut donc imposer des conditions où Σ et T ne sont pas nuls mais suffisamment petits de façon à ce que la condition initiale n'ait aucune influence sur l'évolution ultérieure du disque. A cette fin, on peut imposer une solution analytique correspondant à un cas particulier et pour un taux d'accrétion très petit devant le taux \dot{M}_0 imposé. Par exemple, on pourra employer les formules que donnent Frank, King et Raine au §5.6 [2] pour $P = P_{\text{gaz}}$ et $\kappa_{\text{ff}} \gg \kappa_e$:

$$T = 1.4 \times 10^4 \alpha^{-\frac{1}{5}} \left[\frac{\dot{M}}{10^{16} \text{g s}^{-1}} \right]^{\frac{3}{10}} \left[\frac{M}{M_{\odot}} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{r}{10^{10} \text{cm}} \right]^{-\frac{3}{4}} f^{\frac{3}{10}} \text{K}, \quad (21)$$

$$\Sigma = 5.2 \alpha^{-\frac{4}{5}} \left[\frac{\dot{M}}{10^{16} \text{g s}^{-1}} \right]^{\frac{7}{10}} \left[\frac{M}{M_{\odot}} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{r}{10^{10} \text{cm}} \right]^{-\frac{3}{4}} f^{\frac{7}{10}} \text{g cm}^{-2}, \quad (22)$$

$$\text{avec } f = \left[1 - \left(\frac{r}{3r_s} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (23)$$

où M_{\odot} est la masse du soleil et r_s le rayon de Schwarzschild du trou noir. Dans ce même cas limite on calcule H/r :

$$\frac{H}{r} = 1.7 \times 10^{-2} \alpha^{-\frac{1}{10}} \left[\frac{\dot{M}}{10^{16} \text{g s}^{-1}} \right]^{\frac{3}{20}} \left[\frac{M}{M_{\odot}} \right]^{-\frac{3}{8}} \left[\frac{r}{10^{10} \text{cm}} \right]^{\frac{1}{8}} f^{\frac{3}{5}}. \quad (24)$$

3.2 Les conditions aux limites.

3.2.1 Pour l'évolution de Σ .

L'équation (11) est du deuxième ordre, il faut donc imposer une condition pour chacun des deux bords. Ces conditions doivent nous permettre de calculer le membre de droite de cette équation, c'est-à-dire que la condition doit porter sur le produit $\nu \Sigma r^{1/2}$.

Au bord interne en $r = r_{\text{min}} = 3r_s$ les orbites ne sont plus stables et la matière tombe immédiatement vers le centre, on peut alors poser $\Sigma(r_{\text{min}}) = 0$ et $\nu \Sigma r_{\text{min}}^{1/2} = 0$ si ν ne tend pas vers l'infini lorsque $r \rightarrow r_{\text{min}}$. C'est une condition de type « Dirichlet ».

Au bord externe la condition est $\dot{M} = \dot{M}_0$, ce qui donne, en tenant compte de l'équation (12) donnant la vitesse d'accrétion :

$$6\pi r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{1/2}) = \dot{M}_0.$$

C'est une condition de type « Neumann » portant sur le flux de la quantité $\nu \Sigma r^{1/2}$ en r_{max} .

3.2.2 Pour l'évolution de T .

L'équation (14a) est du premier ordre où il apparaît deux termes d'advection, l'un portant sur Σ et l'autre sur T . Il faut alors imposer deux conditions en « amont » du flux de matière transporté, c'est à dire en r_{max} . L'équation d'évolution de Σ impose à cette quantité une valeur en r_{max} via la condition sur $\frac{\partial}{\partial r} \nu \Sigma r^{1/2}$, il reste seulement à imposer T ou $\frac{\partial T}{\partial r}$ en r_{max} . Il semble plus naturel d'imposer le flux de chaleur $\frac{\partial T}{\partial r}$ plutôt que la température, ce choix est relativement sans importance car ce sont surtout les termes locaux Q^+ et Q^- qui déterminent la température du disque. En effet, la chaleur engendrée localement par la viscosité est bien plus importante que la chaleur advectée depuis le bord externe.

3.2.3 Comment intervient la relativité générale ?

Alors qu'elle est nécessaire, la relativité générale n'intervient que dans la condition au contour $\Sigma(r_{\min}) = 0$ pour $r_{\min} = 3r_s$. Cette condition a, par exemple, pour conséquence l'apparition du facteur f dans l'équation (21). Il est possible de faire un calcul exact de relativité générale (voir, Page et Thorne [7]) et de montrer que ce facteur est donné par :

$$f^{\frac{6}{5}} = \frac{Q}{BC^{\frac{1}{2}}}.$$

Avec, pour un trou noir de Schwarzschild et pour $r^* = r/M$:

$$B = 1, \quad C = 1 - \frac{3}{r^*},$$

$$Q = \left(1 - \frac{3}{r^*}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^*}} \left\{ \sqrt{r^*} - \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{r^*} + \sqrt{3}}{\sqrt{r^*} - \sqrt{3}} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right] \right\}.$$

La figure 1 montre que, finalement, il y a peu de différence entre le calcul exact et le calcul approché.

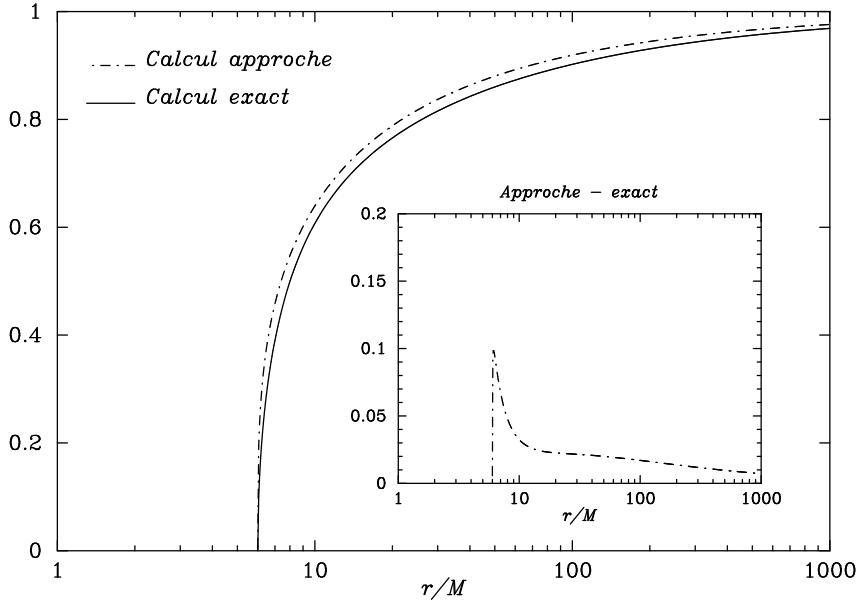


FIG. 1 – Calcul exact, de relativité générale, du facteur $f^{\frac{3}{10}}$ intervenant dans l'expression (21) de la température, comparé à celui, approché, découlant de la condition au contour : $\Sigma(3r_s) = 0$.

3.3 Les temps caractéristiques.

Les équations différentielles (11) et (14a) gouvernent l'évolution de Σ et T en des temps caractéristiques que l'on appelle *temps visqueux* et *temps thermique*, ce sont les temps nécessaires pour que ces valeurs approchent leurs valeurs stationnaires.

Une manière approchée d'obtenir des temps caractéristiques est de remplacer toutes les dérivées par des rapports de quantités caractéristiques : $dy/dx \approx y/x$. Cette façon

de faire se justifie car l'expérience montre que la solution d'une équation quelconque de la physique peut, en général, être approchée par des segments de droites dans un plan $\ln y, \ln x$ (des « lois de puissances ») et que les pentes de ces droites ne sont jamais des nombres très grands devant l'unité.

3.3.1 Le temps visqueux.

Nous allons appliquer notre méthode approchée, on trouvera une démonstration plus rigoureuse au § 5.2 de l'ouvrage de Frank, King et Raine [2] qui d'ailleurs donne, à peu de chose près, le même résultat. L'équation (11) devient :

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{t_{\text{visc}}} &= \frac{3}{R} \frac{1}{R} R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{R} \nu \Sigma R^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{t_{\text{visc}}} &= \frac{3\nu}{R^2}, \\ t_{\text{visc}} &\approx \frac{R^2}{\nu}.\end{aligned}$$

La même opération menée sur l'équation (12) donnant la vitesse d'accrétion v conduit à :

$$v \approx \frac{\nu}{R} \quad \text{d'où} \quad t_{\text{visc}} \approx \frac{R}{v}.$$

Ce temps dépend de R , pour fixer les idées on peut prendre $R = r_{\text{max}}$ et $v = v(r_{\text{max}})$ ce qui exprime que ce temps visqueux est le temps mis par la matière pour s'écouler du bord externe au bord interne à la vitesse d'accrétion trouvée au bord externe. Le module de la vitesse d'accrétion augmentant quand r diminue, le temps réel pour que la matière parcourt cette distance est sûrement inférieur à cette valeur. On doit raisonnablement s'attendre à atteindre l'état stationnaire (s'il existe) au bout d'un temps comparable à ce temps visqueux.

3.3.2 Le temps thermique.

Par le même procédé on obtient : $C_V T / t_{\text{th}} = Q^+ - Q^-$. Les unités du terme $C_V T$ sont des [joule g^{-1}], ce terme est homogène au carré d'une vitesse, c'est le contenu en énergie thermique d'un gramme de matière. Dans le cas où $P_{\text{gaz}} \ll P_{\text{rad}}$, l'énergie thermique est l'énergie cinétique des mouvements désordonnés des particules constituant le gaz. Ce mouvement a lieu à une vitesse moyenne proche de la vitesse du son d'où $C_V T \approx c_s^2$. A l'équilibre thermique $Q^+ - Q^- = 0$ et le système n'évolue plus, le temps caractéristique est infini. En dehors de l'équilibre thermique $Q^+ - Q^- \neq 0$ et la matière évolue avec le temps caractéristique t_{th} , cette évolution peut ramener la matière vers l'équilibre thermique ou au contraire l'en éloigner. Convenons de mesurer le déséquilibre $Q^+ - Q^-$ en unité de Q^+ , soit : $Q^+ - Q^- = \epsilon Q^+$ et envisageons le cas extrême $\epsilon = 1$ que nous prendrons comme cas caractéristique. Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{C_V T}{t_{\text{th}}} &\approx Q^+, \\ \frac{c_s^2}{t_{\text{th}}} &\approx \nu \Omega^2 = \nu \frac{v_\phi^2}{R^2} \\ t_{\text{th}} &\approx \frac{c_s^2}{v_\phi^2} \frac{R^2}{\nu} = \mathcal{M}_\phi^{-2} t_{\text{visc}},\end{aligned}$$

où \mathcal{M}_ϕ est le nombre de Mach tangentiel, ce nombre est très grand devant l'unité, en effet $\mathcal{M}_\phi = v_\phi/c_s = R\Omega/H\Omega = R/H$, par conséquent $t_{\text{th}} \ll t_{\text{visc}}$.

Notons que cette analyse néglige le terme Q_{adv} et qu'elle peut être (et d'ailleurs sera) en défaut dès que $Q_{\text{adv}} \approx Q^+$, dans ce cas on aura $t_{\text{visc}} \approx t_{\text{th}}$. Une telle situation se produit en cas d'instabilité thermique c'est-à-dire lorsque la matière ne retourne pas à l'équilibre thermique après l'avoir quitté.

3.3.3 Le temps dynamique.

Le temps dynamique t_ϕ est le temps caractéristique le plus court du système, c'est le temps mis par la matière pour effectuer une orbite autour du trou noir :

$$t_\phi = \frac{R}{v_\phi} = \Omega^{-1}.$$

Ce temps est aussi égal au temps caractéristique t_z lié à l'équilibre hydrostatique. En effet, les écarts à l'équilibre hydrostatique dans la direction z doivent normalement se dissiper dans le temps t_z nécessaire pour qu'une onde sonore parcourt la distance H , d'où :

$$t_z = \frac{H}{c_s} = \frac{H}{H\Omega} = \Omega^{-1} = t_\phi.$$

3.3.4 Comparaison entre ces divers temps.

Nous avons déjà $t_{\text{visc}} = \mathcal{M}_\phi^2 t_{\text{th}}$ et $t_\phi = t_z$, il reste à comparer t_{th} et t_ϕ . En utilisant la prescription α on obtient :

$$\begin{aligned} t_{\text{th}} &\approx \frac{c_s^2 R^2}{v_\phi^2 \nu} = \frac{c_s^2 R^2}{\nu v_\phi^2} = \frac{c_s^2}{\alpha c_s H} t_\phi^2, \\ &\approx \frac{c_s}{\alpha H} t_\phi^2 = \frac{1}{\alpha t_z} t_\phi^2 = \alpha^{-1} t_\phi. \end{aligned}$$

En se rappelant que $\mathcal{M}_\phi = R/H$ il vient :

$$t_\phi \approx t_z \approx \alpha t_{\text{th}} \approx \alpha (H/R)^2 t_{\text{visc}}. \quad (25)$$

Si, en effet, le disque est géométriquement mince et si $\alpha \leq 1$, alors l'ordre des temps caractéristiques est le suivant : $t_\phi \approx t_z \leq t_{\text{th}} \ll t_{\text{visc}}$. Les valeurs du temps dynamique et du temps thermique sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} t_\phi &\approx 7.2 \cdot 10^{-5} \frac{M}{M_\odot} \left[\frac{r}{3r_s} \right]^{\frac{3}{2}} \text{ s}, \\ t_{\text{visc}} &= 0.28 \alpha^{-\frac{4}{5}} \left[\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\text{crit}}} \right]^{-\frac{3}{10}} \left[\frac{M}{M_\odot} \right]^{\frac{12}{10}} \left[\frac{r}{3r_s} \right]^{\frac{5}{4}} \left[1 - \left(\frac{r}{3r_s} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{6}{5}} \text{ s}, \end{aligned}$$

où le rapport H/R correspond au cas limite donné en (24) et \dot{M}_{crit} est introduit plus bas [voir équation (28) page 21]. Le taux \dot{M}_{crit} correspond plus ou moins à un taux d'accrétion maximum. En posant $r/3r_s \approx 100$ et $\dot{M}/\dot{M}_{\text{crit}} \approx 0.001$, on trouve approximativement : $t_{\text{visc}} \approx 800 \alpha^{-\frac{4}{5}} (M/M_\odot)^{1.2} \text{ s}$.

3.4 Variables sans dimension.

Lorsque l'on cherche à résoudre numériquement un problème physique, il y a intérêt à travailler avec des variables proches de l'unité. Un moyen d'y parvenir est de diviser ces variables par une valeur caractéristique et d'obtenir ainsi une variable *sans dimension* dite normalisée. Ce faisant, d'un point de vue numérique on améliore la précision des calculs car on ne manipule que des nombres proches de un où leur représentation en virgule flottante est la plus dense, et on réduit également les risques de dépassement de capacité par « underflow » ou « overflow ». D'un point de vue physique, on y gagne aussi en compréhension sur la physique du problème car ces valeurs caractéristiques sont souvent des solutions « à l'ordre zéro ».

3.4.1 Normalisation suggérée par l'équation sur Σ .

Pour la variable temporelle, on peut prendre comme temps caractéristique le temps mis par la matière pour parcourir la dernière orbite stable et introduire ainsi le temps sans dimension t^* :

$$t^* = t\Omega_{\max}, \quad \text{avec : } \Omega_{\max} = \left(\frac{GM}{r_{\min}^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour la variable d'espace, la grandeur caractéristique est le rayon de Schwarschild, mais on a avantage à considérer la variable x suivante :

$$x = \left(\frac{r}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui avec le changement de variable $S = \Sigma x$ permet d'écrire l'équation (11) sous la forme plus simple :

$$\frac{\partial S}{\partial t^*} = \frac{3}{4} \frac{1}{\Omega_{\max} x^2 r_s^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nu S.$$

Cette équation suggère une normalisation de la viscosité du type suivant :

$$\nu^* = \frac{3}{4} \frac{\nu}{\Omega_{\max} r_s^2}.$$

L'équation d'évolution de S s'écrit alors :

$$\frac{\partial S}{\partial t^*} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nu^* S. \quad (26)$$

Par voie de conséquence l'équation sur la vitesse radiale s'écrit :

$$v = - \frac{2\Omega_{\max} r_s}{Sx} \frac{\partial}{\partial x} \nu^* S,$$

Il est logique de mesurer la vitesse d'accrétion par rapport à la vitesse du son : $c_s = \Omega H$. Si \mathcal{M} désigne le nombre de Mach il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= - \frac{2\Omega_{\max} r_s}{\Omega H S x} \frac{\partial}{\partial x} \nu^* S, \\ &= - \frac{1}{x\Omega^*} \frac{1}{H^* S} \frac{\partial}{\partial x} \nu^* S, \end{aligned}$$

avec les normalisations :

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\Omega_{\max}} = 3^{\frac{3}{2}} x^{-3}, \quad H^* = \frac{H}{r_s}.$$

Le taux d'accrétion est normalisé par rapport au taux d'accrétion imposé :

$$\dot{m} = \frac{\dot{M}}{\dot{M}_0} = -2\pi\sqrt{27}\frac{\Omega_{\max}r_s^2}{\dot{M}_0}x^{-2}S\mathcal{M}H^*.$$

3.4.2 Normalisation de l'équation d'évolution de T .

Il apparaît des termes en T^4 dans cette équation, il y a donc lieu de normaliser soigneusement la température afin de limiter les risques de dépassement de capacité. Il est possible d'avoir une idée de la température à l'aide de considérations énergétiques.

L'énergie à la disposition du système est l'énergie potentielle de gravitation due au trou noir. Au cours de la chute de la matière vers le centre du système, son énergie potentielle est transformée pour partie en énergie interne (la matière s'échauffe) et pour une autre partie en énergie rayonnée (perdue pour le système). D'après le théorème du viriel ces deux parties sont égales, ce qui implique que la puissance totale rayonnée par le disque d'accrétion est, pour $r_{\max} \gg r_{\min} = 3r_s$:

$$L_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{M}_0}{r_{\min}} = \frac{1}{12} \dot{M}_0 c^2. \quad (27)$$

En faisant le même raisonnement pour la chute de la matière de $r + \Delta r$ à r on trouve en régime stationnaire :

$$\Delta L = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{M}_0}{r^2} \Delta r = 6x^{-3} \Delta x L_{\text{tot}}.$$

Cette puissance est rayonnée par les deux faces de l'anneau à la température effective T_{eff} définie par : $\Delta L = 2 \times 2\pi r \Delta r \sigma T_{\text{eff}}^4$, où $\sigma = ac/4$ est la constante de Stefan, $\sigma = 5.66956 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Il vient $\sigma T_{\text{eff}}^4 = 3x^{-5} L_{\text{tot}} / 4\pi r_s^2$, la température T_{eff} dépend de x . On peut choisir comme température caractéristique T_0 la température effective pour $x = 3^{\frac{1}{2}}$, d'où :

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad \text{avec} \quad T_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{27}} \frac{L_{\text{tot}}}{4\pi r_s^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

L'équation (29) fournit une expression plus pratique de T_0 .

4 Solution numérique du problème.

La première tâche à accomplir est de choisir les paramètres M , \dot{M}_0 , (X, Y, Z) et α . Le choix de M dépend du problème physique que l'on désire étudier ; s'il s'agit d'un disque d'accrétion autour d'une binaire X on prendra $M = 3M_{\odot}$, si l'objet central est un trou noir super-massif au centre d'une galaxie on prendra $M = 10^7$ ou $10^8 M_{\odot}$.

Il est plus délicat de choisir \dot{M}_0 , car au delà d'un certain taux la pression de radiation engendrée par la lumière émise et s'exerçant sur la matière accrétée contrebalance la gravité. L'accrétion ne peut alors plus avoir lieu et le modèle devient incohérent. Dans le cas d'une accrétion sphérique autour d'un objet de masse M , la luminosité

maximun que l'objet est susceptible d'atteindre est la luminosité d'Eddington : L_{Edd} , son expression est donnée par la formule suivante où m_p est la masse du proton et σ_e est la section efficace de Thomson ($\sigma_e = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^{-2}$) :

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_e} \\ \approx 1.26 \cdot 10^{31} \frac{M}{M_\odot} \text{ watt} .$$

Cette luminosité permet, par l'intermédiaire de l'équation (27), de définir un taux d'accrétion critique :

$$\dot{M}_{\text{crit}} = \frac{12}{c^2} L_{\text{Edd}} , \\ \approx 1.68 \cdot 10^{18} \frac{M}{M_\odot} \text{ g s}^{-1} \quad (28)$$

L'accrétion n'est peut-être pas sphérique mais nous prendrons \dot{M}_{crit} comme référence. Définissons f comme étant le taux d'accrétion par rapport au taux critique : $\dot{M}_0 = f \dot{M}_{\text{crit}}$. à titre d'essai on pourra commencer par $f = 0.001$ et augmenter progressivement f . L'introduction du taux d'accrétion critique permet d'exprimer la température caractéristique :

$$T_0 \approx 2.50 \cdot 10^7 \left[\frac{\dot{M}_0}{\dot{M}_{\text{crit}}} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{M}{M_\odot} \right]^{-\frac{1}{4}} \text{ Kelvin} . \quad (29)$$

Pour la composition chimique du gaz, nous prendrons les abondances solaires, comme il a déjà été mentionné en (2), soit : $X = 0.7$, $Y = 0.28$ et $Z = 0.02$. Pour le paramètre alpha nous prendrons $\alpha = 1$.

étant données la masse de l'objet central et la composition chimique du gaz, on calcule certaines constantes du problème ainsi que la fonction $\Omega = \Omega(r)$:

$$M \rightarrow (r_s, \Omega, \dot{M}_{\text{crit}}) , \\ (X, Y, Z) \rightarrow \mu .$$

4.1 Résolution des équations algébriques.

Supposons Σ et T connus au temps t , il est alors possible d'en déduire toutes les autres variables du problème en résolvant de simples équations algébriques. Le seul calcul qui pose une petite difficulté est celui de H .

4.1.1 Calcul de H .

Ce calcul se simplifie grandement si l'on suppose que Γ_1 est constant (on prend généralement $\Gamma_1 = 1$). écrivons l'équation $P = P_{\text{gaz}} + P_{\text{rad}}$, il vient :

$$P = P_{\text{gaz}} + P_{\text{rad}} , \\ c_s^2 \rho = \frac{\mathcal{R} \rho T}{\mu} + \frac{1}{3} a T^4 , \\ \Omega^2 H^2 \rho = \frac{\mathcal{R} T}{\mu} \rho + \frac{1}{3} a T^4 , \\ \frac{1}{2} \Omega^2 \Sigma H = \frac{\mathcal{R} T}{\mu} \frac{\Sigma}{2H} + \frac{1}{3} a T^4 .$$

Les variables Σ et T étant connues, l'équation précédente montre que H est solution d'un trinôme du second degré $aH^2 + bH + c = 0$ avec :

$$a = \frac{1}{2}\Omega^2\Sigma; \quad b = -\frac{1}{3}aT^4; \quad c = -\frac{\mathcal{R}T\Sigma}{2\mu}. \quad (30)$$

Ce trinôme possède deux racines de signes opposés, seule la racine positive doit être prise en considération.

Le calcul des racines d'un trinôme peut poser des problèmes de précision, par exemple si $b^2 \gg 4ac$. D'une manière générale pour calculer les racines du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ on calcule la racine de plus grande valeur absolue et on trouve l'autre à partir de leur produit, soit :

$$\Delta = b^2 - 4ac, \\ x_1 = \frac{-b - \text{sign}(b)\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{c}{ax_1}.$$

Pour le calcul de x_1 on écrirait en fortran :

$$x_1 = -0.5 d0 * (b + \text{sign}(\text{sqrt}(\text{Delta}), b))/a.$$

4.1.2 Calcul des autres variables.

L'ordre de calcul des variables non-normalisées est le suivant :

$$(T, \Sigma) \rightarrow (a, b \rightarrow P_{\text{rad}}, c) \rightarrow H \rightarrow (c_s, \rho), \\ c_s \rightarrow \nu \rightarrow (Q^+, v \rightarrow \dot{M}). \\ \rho \rightarrow (P_{\text{gaz}}, \kappa_{\text{ff}}), \\ P_{\text{gaz}} \rightarrow P \rightarrow \beta \rightarrow (C_V, \Gamma_3) \rightarrow Q_{\text{adv}}. \\ \kappa_{\text{ff}} \rightarrow \tau_{\text{eff}} \rightarrow F_z \rightarrow Q^-.$$

4.2 Résolution numérique de l'équation thermique.

4.2.1 Le calcul des termes d'advection.

Considérons l'équation, dite d'advection, qui rend compte du transport de la quantité u vers les $r > 0$ (c'est à dire de la « gauche » vers la « droite ») à la vitesse v :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v > 0. \quad (31)$$

On suppose que la fonction u est connue sur la frontière « gauche » du domaine soit : $u(0, t) = s(t)$ (condition de Dirichlet). Dans ce cas la solution exacte est donnée par $u(r, t) = s(t - r/v)$ (voir Fig. 2).

Le gradient au point j peut être estimé suivant l'un ou l'autre des schémas suivants, qui ne sont exacts qu'au premier ordre $O(\Delta r)$ près :

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta r}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_j}{\partial r} \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta r}.$$

La première formule correspond à une dérivée « aval » par rapport au sens du courant et la seconde à une dérivée « amont ». L'équation (31) étant linéaire, on peut alors étudier la stabilité de ces schémas d'après la méthode de Von Neumann.

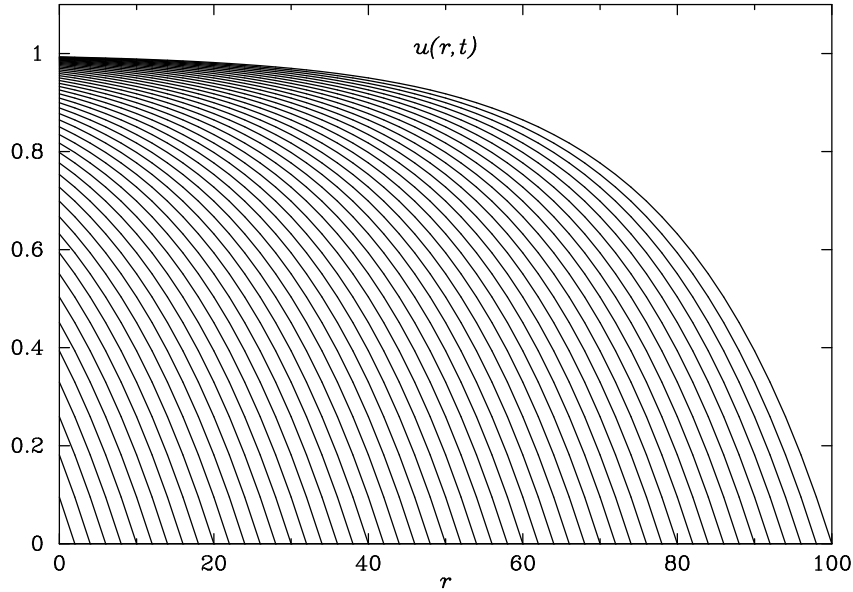


FIG. 2 – Solution de l'équation d'advection (31) pour la fonction source $s(t) = 1 - e^{-t/\tau}$. La vitesse d'advection est : $v = 1$, le temps caractéristique de la condition au bord est : $\tau = 5$ et le temps qui sépare deux tracés est : $\Delta t = 2$.

Soit $u = u(r, t)$ la solution de l'équation d'advection, on ajoute à u une perturbation δu puis on cherche à établir comment évolue cette perturbation avec le temps. Plutôt que δu , on considère sa transformée de Fourier. La linéarité de (31) nous permet de n'étudier qu'un terme de cette transformée de Fourier, soit : $\delta u = \tilde{u}(t) e^{ikr}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
 e^{ikr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -v \frac{e^{ik(r+\Delta r)} - e^{ikr}}{\Delta r} \tilde{u}, & \text{ou} &= -v \frac{e^{ikr} - e^{ik(r-\Delta r)}}{\Delta r} \tilde{u}, \\
 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -v \frac{e^{ik\Delta r} - 1}{\Delta r} \tilde{u}, & &= -v \frac{1 - e^{-ik\Delta r}}{\Delta r} \tilde{u}, \\
 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &\approx (-v ik + v \frac{1}{2} k^2 \Delta r) \tilde{u}, & &\approx (-v ik - v \frac{1}{2} k^2 \Delta r) \tilde{u}.
 \end{aligned}$$

Ce qui montre que, en fonction du schéma adopté, l'amplitude des perturbations évolue comme :

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(0) e^{-ikvt} e^{\pm \frac{1}{2} k^2 \Delta r t},$$

et que seules les dérivées « amonts » conduisent à des solutions stables.

Le choix de l'approximation des gradients étant fait, il reste à décider du schéma temporel, on a le choix entre deux sortes de schémas, les schémas *explicites* ou *implicites*. Posons $u(j\Delta r, n\Delta t) = u_j^n$, pour $j = 1, \dots, J$. Dans tous les cas on approxime la dérivée temporelle en j par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}.$$

On donne ci-dessous deux exemples de chacun des schémas.

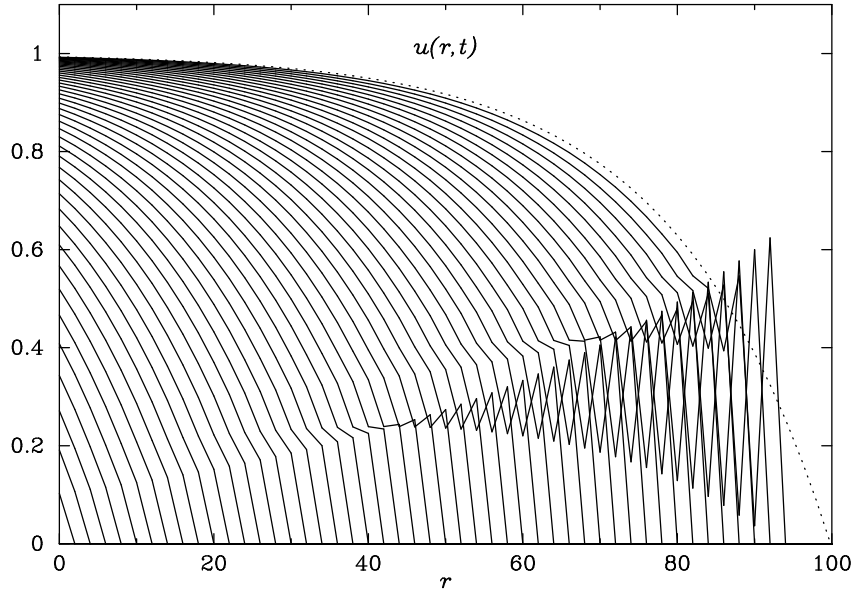


FIG. 3 – Apparition d’instabilités numériques dans un schéma explicite lorsque le pas de temps ne satisfait pas la condition de Courant (ici on a $\lambda = 1.04$). L’équation à résoudre est l’équation (31).

Schéma explicite. Dans un schéma explicite, les gradients sont estimés au temps $n\Delta t$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - v \frac{\Delta t}{\Delta r} (u_j^n - u_{j-1}^n), \\ u_j^{n+1} &= \lambda u_{j-1}^n + (1 - \lambda) u_j^n, \end{aligned}$$

où on a posé $\lambda = v\Delta t/\Delta r$. L’équation précédente peut s’écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & & 0 \\ \lambda & 1 - \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_J^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda u_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où l’on a tenu compte de la condition au bord. Soit encore, avec des notations évidentes :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^n + \lambda \mathbf{s}^n.$$

Ce schéma n’est stable que si $\lambda \leq 1$ (voir figure 3). Une condition de ce type s’appelle *condition de Courant* ou condition CFL (pour Courant, Friedrichs, Lewy).

Schéma implicite. Dans un schéma implicite les gradients sont estimés au temps $(n + 1)\Delta t$, ce qui conduit aux J équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}), \\ -\lambda u_{j-1}^{n+1} + (1 + \lambda)u_j^{n+1} &= u_j^n, \end{aligned}$$

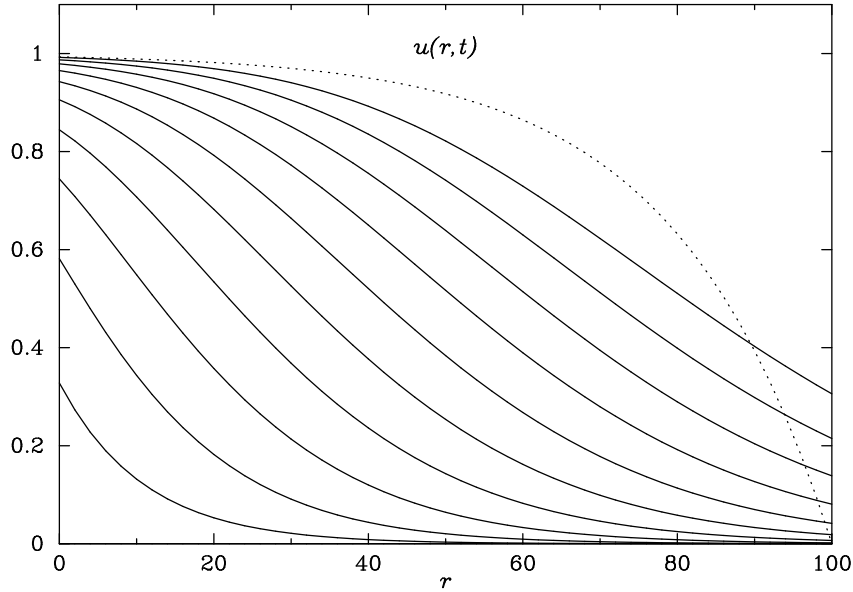


FIG. 4 – Résolution numérique de l'équation (31) par un schéma implicite avec $\lambda = 5$. L'approximation des dérivées par des différences finies fait apparaître de la diffusion numérique par rapport à la solution exacte.

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 & & 0 \\ -\lambda & 1 + \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda & 1 + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_J^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda u_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \lambda \mathbf{s}^{n+1}.$$

Le schéma est inconditionnellement stable quel que soit $\lambda > 0$.

4.3 Résolution numérique de l'équation d'évolution de la densité de surface Σ .

L'équation d'évolution de la densité de surface Σ sous sa forme réduite (26) est assez « proche » d'une équation de diffusion. La forme 1-D la plus simple d'une équation de diffusion est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (32)$$

où D est le coefficient de diffusion, en $[\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}]$. L'équation de la chaleur, par exemple, est une équation de diffusion.

Pour résoudre l'équation (32) il faut établir deux conditions aux limites et une condition initiale. Il existe plusieurs types de conditions aux limites, celles qui correspondent à notre problème supposent l'existence d'un débit constant en $r = r_{\max}$ et d'un puits en $r = 0$.

Suivant ces considérations, et à titre d'exemple, cherchons la solution de l'équation (32) avec les conditions aux limites $u'(0, t) = g_0$, $u(x_{\max}, t) = 0$, et la condition

initiale $u(x, 0) = 0$. Pour $x \in]0, x_{\max}]$, la méthode classique de Fourier nous permet d'obtenir la solution exacte de ce problème. On a :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g_0(x - x_{\max}) + 2g_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \ell \frac{\pi}{2}}{\ell \frac{\pi}{2}} \right]^2 \cos\left(\ell \frac{\pi}{2} \frac{x}{x_{\max}}\right) \exp\left(-[\ell \frac{\pi}{2}]^2 \frac{Dt}{x_{\max}^2}\right), \\ &= -2g_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \ell \frac{\pi}{2}}{\ell \frac{\pi}{2}} \right]^2 \cos\left(\ell \frac{\pi}{2} \frac{x}{x_{\max}}\right) \left[1 - \exp\left(-[\ell \frac{\pi}{2}]^2 \frac{Dt}{x_{\max}^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans la section suivante nous comparerons cette solution avec celles fournies par les méthodes numériques.

La solution $u(x, t)$ tend vers la solution stationnaire $u(x, \infty) = g_0(x - x_{\max})$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Si le temps t dépasse quelques temps de diffusion $\tau = x_{\max}^2/D$, $u(x, t)$ est pratiquement confondu avec la solution stationnaire.

4.3.1 Résolution numérique d'une équation de diffusion.

La fonction $u(x, t)$ est échantillonnée suivant les pas Δx et Δt , si J est le nombre de points suivant l'axe des x , on a $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/(J - 1)$, le pas Δt dépend du schéma numérique adopté. On pose comme d'habitude $u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t)$. Nous estimerons la dérivée seconde par la méthode des différences finies, elle fournit l'approximation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Pour le schéma temporel on a le choix entre des méthodes explicites ou des méthodes implicites. Nous envisageons ci-dessous un exemple de chacune des deux méthodes.

Schéma explicite. Pour $j = 1, \dots, J - 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &= \lambda u_{j-1}^n + (1 - 2\lambda)u_j^n + \lambda u_{j+1}^n, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = D\Delta t/\Delta x^2$.

Pour $j = 0$ on obtient la dérivée seconde grâce au développement limité : $u_1 = u_0 + \Delta x u_0' + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_0'' + O(\Delta x^3)$, d'où on tire $u_0'' \approx \frac{2}{\Delta x^2}(u_1 - u_0 - \Delta x g_0)$ et le schéma :

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= u_0^n + 2\lambda(u_1^n - u_0^n - \Delta x g_0), \\ &= (1 - 2\lambda)u_0^n + 2\lambda u_1^n - 2\lambda \Delta x g_0. \end{aligned}$$

Pour le bord $j = J$ la condition est plus simple, on a :

$$u_J^{n+1} = u_J^n = 0.$$

On obtient donc la solution au pas $n + 1$ en fonction de la solution au pas n de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{j-2}^{n+1} \\ u_{j-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & 2\lambda & & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ 0 & & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{j-2}^n \\ u_{j-1}^n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2\Delta x g_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_J^n \end{pmatrix}.$$

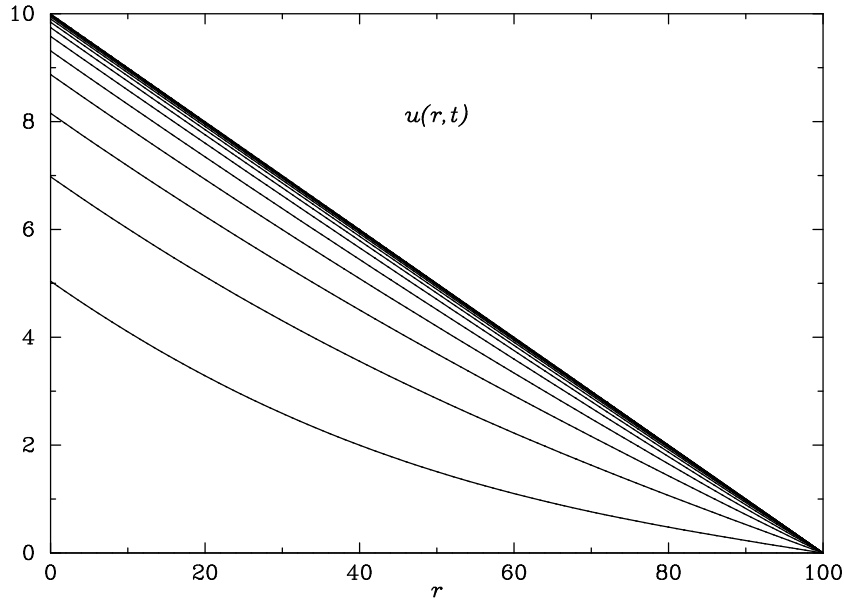


FIG. 5 – Solution numérique de l'équation de diffusion (32) pour les conditions aux limites $u'(0, t) = -0.1$, $u(x_{\max}, t) = 0$ et la condition initiale $u(x, 0) = 0$. Le coefficient de diffusion est : $D = 1$. Le schéma est explicite, le pas de temps correspond au paramètre $\lambda = 0.5$ et on a effectué 15 000 pas de temps ($t = 3\tau$), on ne trace la solution que tous les 1000 pas de temps. à l'échelle du graphe la solution numérique est confondue avec la solution exacte.

Soit encore :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^n + \lambda \mathbf{s}^n,$$

où \mathbf{B} est une matrice tri-diagonale.

Ce schéma est stable pour $\lambda \leq 0.5$ et instable pour $\lambda > 0.5$. La figure 5 montre un exemple de résolution numérique de l'équation de diffusion pour $\lambda = 0.5$, le calcul a été mené jusqu'à trois temps de diffusion ($t_{\max} = 3\tau$).

Schéma implicite. De manière analogue, on obtient pour le schéma implicite :

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -2\lambda & & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2\Delta x g_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \lambda \mathbf{s}^{n+1},$$

où \mathbf{A} est également une matrice tri-diagonale. Le schéma est inconditionnellement stable quel que soit $\lambda > 0$.

La figure 6 montre les solutions obtenues à l'aide du schéma implicite lorsque le pas de temps correspond à mille fois la condition de Courant. On y constate que les solutions trouvées par la méthode implicite diffèrent de la solution exacte. Un tel

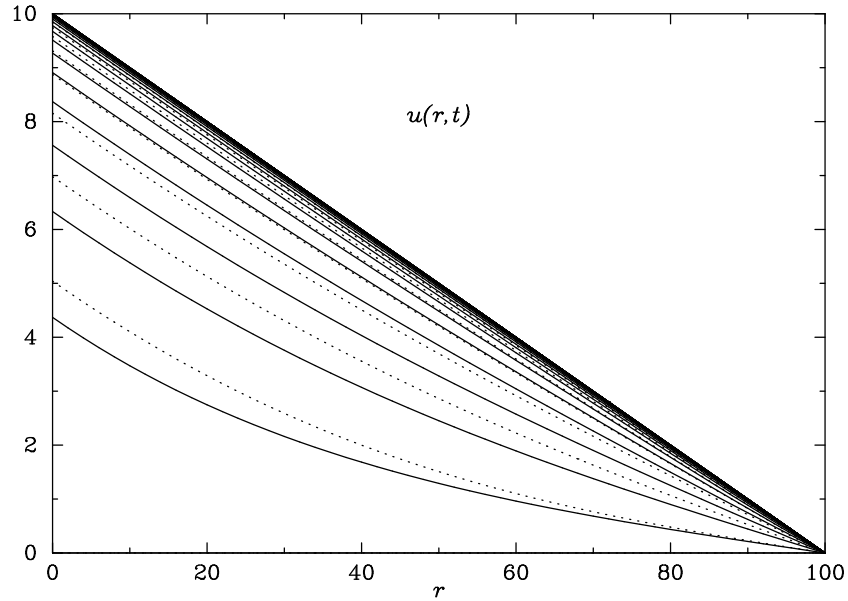


FIG. 6 – Solution numérique de l'équation de diffusion (32) pour les mêmes conditions que celles de la figure 5. Le schéma est implicite, le pas de temps correspond au paramètre $\lambda = 500$ et on a effectué 30 pas de temps ($t_{\max} = 3\tau$), on a tracé la solution pour tous les pas de temps. La solution exacte est en pointillés.

comportement est prévisible dès que l'on prend des pas de temps aussi grands. En revanche s'il existe une solution stationnaire, ce qui est le cas ici, elle est trouvée très rapidement par le schéma implicite.

Le schéma de Crank-Nicholson. Cette méthode consiste à combiner la précision du schéma explicite avec la stabilité du schéma implicite. Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} dépendent du paramètre λ , faisons apparaître cette dépendance en indice soit : \mathbf{A}_λ et \mathbf{B}_λ , avec ces notations le schéma de Crank-Nicholson s'écrit :

$$\mathbf{A}_{\beta\lambda}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}_{(1-\beta)\lambda}\mathbf{u}^n + \lambda[\beta\mathbf{s}^{n+1} + (1-\beta)\mathbf{s}^n], \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Le schéma est stable quel que soit λ .

Références

- [1] Cox J. P., Giuli R. T., 1968, *Principles of stellar structure Vol. 1*, Gordon and Breach, New-York.
- [2] Frank J., King A.R., Raine D.J., 1985, *Accretion power in astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge
- [3] Illiaronov A.R., Sunyaev R.A., 1974, *Soviet Astron.-AJ*, **18**, 413
- [4] Kippenhahn, Weigert, 1994, *Stellar structure and evolution*, Springer-Verlag, Berlin
- [5] Landau L., Lifchitz E., 1971, *Mécanique des Fluides*, éditions Mir, Moscou.

- [6] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A., 1973, *Gravitation*, Freeman and co., San Francisco
- [7] Page D.N., Thorne K.S., 1974, *Astrophys. J.*, **191**, 499
- [8] Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979, *Radiative processes in Astrophysics*, Wiley-Interscience, New-York.
- [9] Sakura, Sunyaev, 1973, *Astron. & Astrophys.*, **24**, 337
- [10] Taam R.E., Lin D.N.C., 1984, *Astrophys. J.*, **287**, 761