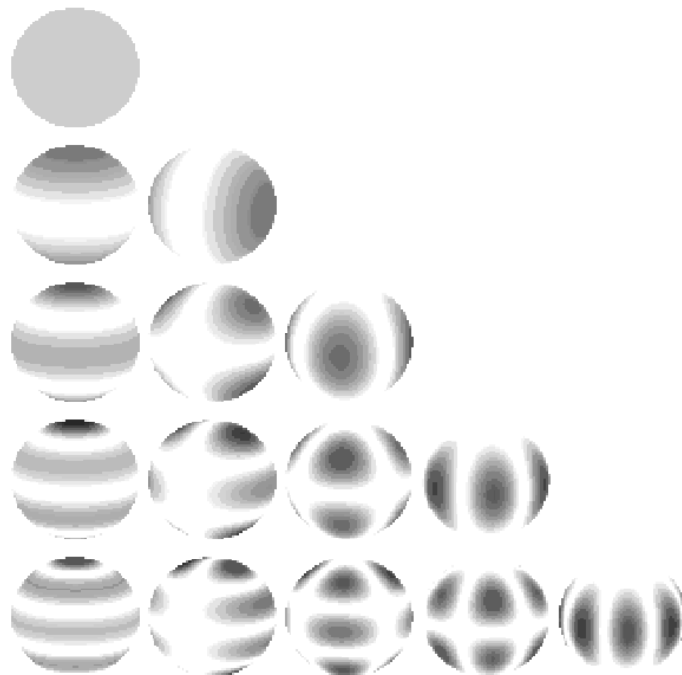


Ecole Doctorale d'Astrophysique d'Ile de France 2001-2002

STRUCTURE INTERNE & SISMOLOGIE

Benoît Mosser
Observatoire de Paris



I./ INTRODUCTION

..... Introduction 3

Table des matières

0	Préambule	4
0.1	Structure interne & Sismologie	4
0.2	Aspects pratiques	5
0.3	Plan du cours (4 fascicules)	5
0.4	Références	6
0.5	Données physiques	6
1	Structure interne	7
1.1	Quelques repères historiques	7
1.2	Informations sur la structure interne	8
2	Ordres de grandeur	9
2.1	Température	10
2.2	Pression	11
2.3	Longueurs	13
2.4	Caractérisation du milieu	15
2.5	Echelles de temps	16
3	Objets froids	23
3.1	Froid ?	23
3.2	Etude de l'équilibre	23
3.3	Cas semi-relativiste	27
4	Objets chauds	30
4.1	Equilibre hydrostatique	30
4.2	Viriel	30
5	Le fluide parfait	31
5.1	Le fluide parfait de fermions	31
5.2	Gaz de photons	35
6	Annexe : équations d'état, compléments	36
6.1	Notions de base	36
6.2	Approche "chimique" : minimisation de l'énergie libre	38
6.3	Approche "physique" : développement en fugacité	39

Liste des figures

1	Comte de Buffon	7
2	J. Verne : voyage au centre de la Terre	8
3	Marche au hasard	17
4	Relation masse-luminosité	19
5	Sir Isaac Newton	21
6	Relation masse-rayon	26

Liste des tableaux

1	Données physiques	6
2	Ordre de grandeur de la température	11
3	Ordre de grandeur de la pression	12
4	Comparaison des termes de pression	13
5	Echelle de temps collisionnelle	20
6	Echelle de temps dynamique	21
7	Le fluide parfait	35

0. Préambule

0.1. Structure interne & Sismologie

Voici la 5ème version des notes de cours “Structure interne & Sismologie” présenté aux étudiants de l’Ecole Doctorale d’Astrophysique de l’Île de France et plus spécialement à ceux du DEA d’Astrophysique de l’Université Paris 6.

Ces notes de cours présentent :

- Une analyse de problèmes génériques : mode de transport de l’énergie, stabilité d’un astre, grandeurs physiques caractéristiques obtenues par analyse dimensionnelle...
- Une description des ingrédients et outils pour construire un modèle de structure interne.
- Une mise en évidence de l’efficacité de l’analyse sismique... ce n’est pas tous les jours qu’en astrophysique on mesure couramment des grandeurs à 10^{-6} près, et qu’on en déduit des résultats quantifiables à mieux que 10^{-3} près.
- Des éléments de réflexion, p.ex. : que veut dire *adiabatique*, dans enveloppe adiabatique, évolution adiabatique, onde adiabatique... ? en quoi un réseau mondial de sites d’observation est-il indispensable à l’observation d’un phénomène temporel ?
- Un examen de situations actuelles, à l’heure où “vole” le satellite d’observation solaire SoHo (projet NASA+ESA comprenant à bord 3 manips d’héliosismologie), et où se prépare le projet COROT (petite mission du CNES : CONvection, ROTation et Transits planétaires).

Malgré le volume (en 4 fascicules : Introduction, Structure interne, Sismologie, Observation) et quelques 180 pages, ces notes restent incomplètes¹, et parfois (trop) peu rédigées, pour traiter un sujet important – la structure interne des astres – entièrement renouvelé par un outil nouveau – la sismologie, formidablement développée pour le soleil, encore balbutiante pour les étoiles et planètes géantes.

Enfin, dans le cadre de la restructuration des études post-doctorales, ce cours essaie d’aborder les divers aspects ci-dessus mentionnés dans l’esprit du DEA d’astrophysique de l’Université Paris 6 : une grande part sera dévolue aux aspects pratiques, instrumentaux et observationnels. Les aspects trop techniques (trop théoriques, trop numériques, trop n’importe quoi qui se

1. Des compléments seront apportés dans le cadre des cours de 2ème année de l’école doctorale

termine en -ique, physique exceptée) seront uniquement brièvement introduits puis laissés de côté.

0.2. Aspects pratiques

- Une introduction par le signe • ne fait que participer à la respiration du cours. En gros, ce symbole marque un changement d'idée.
- ★ Ce signe dénote un point plus important, ou ardu, ou suspect...

?! Cette mise en forme de questions-réponses introduit des éléments de réflexion simples à traiter, dans la mesure où les questions peuvent être résolues en un très petit nombre d'étapes (en général une seule). Il reste ensuite un peu de place pour apporter les éléments de réponse, avant de se précipiter sur la solution donnée en note de bas de page²

-
- La marge droite est généreuse...

... afin de vous
laisser de la
place pour
prendre des
notes

0.3. Plan du cours (4 fascicules)

- **1. Introduction :**

- ★ *Généralités & rappels de physique qui, évidemment, sont utiles pour les chapitres suivants*

- introduction
- analyse dimensionnelle et grandeurs caractéristiques
- équations d'états : objets froids, objets chauds

- **2. Structure interne**

- ★ *Tout ce qu'il faut connaître pour construire un objet*

- lois physiques
- transport de l'énergie
- modèles de structure interne
- contraintes observationnelles
- cas particuliers : Jupiter, Soleil

- **3. Sismologie**

- ★ *De la structure interne au spectre d'oscillations, et problème inverse*

- rappel d'hydrodynamique
- propagation d'une onde sonore
- grandeurs physiques caractéristiques
- théorie asymptotique
- spectres théoriques
- problème inverse

2. Et bien-sûr ces questions peuvent servir d'entraînement pour l'examen !

– quelques cas particuliers

• **4. Observations sismiques**

★ Où l'on boucle le cours : présentation des techniques instrumentales utilisées en sismologie, traitement du signal et analyse des données, et retour en terme de structure interne

- analyses temporelle et spatiale
- outils d'analyse sismique
- différentes méthodes d'observations
- analyse des résultats solaires
- premiers résultats astérosismiques
- projets spatiaux

0.4. Références

Ouvrages généraux sur lesquels se base ce premier chapitre

- Forestini M. 1999, *Principes fondamentaux de structure stellaire*. Gordon and Breach Science Publishers.
- Landau L. et Lifschitz E. 1958, *Thermodynamique*. Editions Mir
- Landau L. et Lifschitz E. 1958, *Mécanique des fluides*. Editions Mir
- Mihalas D., Mihalas B. 1984, *Foundations of radiation hydrodynamics*, Oxford University Press.
- Schatzman E., Praderie F. 1990, *Les étoiles*, InterEditions/Editions du CNRS.

0.5. Données physiques

cste de gravitation	$\mathcal{G} = 6,6725 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
constante de Planck	$h = 6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
constante de Boltzmann	$k_{\text{B}} = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
nombre d'Avogadro	$\mathcal{N} = 6,0252 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
célérité de la lumière	$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
rayon de Bohr	$a_0 = 0,5292 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
masse du proton	$m_{\text{p}} = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
masse du neutron	$m_{\text{n}} = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
masse de l'électron	$m_{\text{e}} = 0,9109 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
Rydberg	$R_{\infty} = 1,3605 \cdot 10^1 \text{ eV}$
constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

TAB. 1 – Données physiques

1. Structure interne

1.1. Quelques repères historiques

a. Terre

- Lorsque la Terre était plate : ce cours n'aurait pas eu lieu... on s'interrogeait sur ce qui se passe au bord du disque terrestre, pas à l'intérieur !
- Rotondité de la Terre : quelques "évidences"
 - V^e : Anaxagore (Athènes) : l'ombre terrestre projetée sur la Lune est circulaire
 - III^e : Erathostène de Cyrène : mesure du rayon, 5000 stades entre Syène (Assouan) et Alexandrie, $7^{\circ}12'$ $\rightarrow 2\pi R_T = 44\,000$ km
- 1749 : Buffon, Théorie de la Terre
 - La création du système solaire suite au choc entre le Soleil et une comète conduit à une Terre initialement *chaude*
 - Relief et érosion dus à l'eau
 - Mesure de l'âge de la Terre, déduite de son refroidissement, comparé à celui d'un boulet de canon (officiellement : 75 000 ans, officieusement 3 millions d'années)

terre nour-
ricière, terre
végétale, terre
émergée;
centre du
monde, monde
immobile
Expérience !



FIG. 1 – *Georges Louis Leclerc, comte de Buffon, 1707-1788. Naturaliste et honnête homme ; il s'intéressa entre autres au refroidissement de boulets de plomb, pour une analogie avec l'histoire du refroidissement de la Terre*

b. Soleil

- Question énergétique abordée au XIX^e siècle
 - Vie sur le Soleil : problématique non exclue encore au XIX^e, le soleil n'étant considéré que comme une Terre en plus chaud
- L'intérieur du Soleil et la physique nucléaire :
 - C'est en 1926 qu'Eddington conçoit le mécanisme de conversion de l'hydrogène en hélium, mais le lien avec la source énergétique solaire n'est pas encore fait
 - 1937, Goldschmidt : l'hydrogène est l'élément le plus abondant de l'univers
 - 1938, Bethe & Weizsäcker, explication de la machine Soleil, avec entre autres la découverte du cycle CNO



FIG. 2 – Voyage au centre de la Terre (Jules Verne)

– 1950... chaîne p-p, réaction $3 \alpha \rightarrow C$

c. *Quelques remarques hors champ physique*

- Enfer souterrain
 - L'enfer, au gré des cultures et des civilisations, est le plus souvent situé dans les entrailles de la Terre; tantôt chaud, parfois froid (en Grèce ancienne : vaste caverne souterraine)
- “Voyage au centre de la Terre”, Jules Verne, 1864
 - Vulgarisation soignée des recherches alors menées
 - chaleur centrale, Refroidissement, ‘naissance’ de la vie...pas mal d’ingrédients sont présents, qui dénotent souvent une bonne perception de la description physique de ces phénomènes.
- Que signifient ?
 - “aller au fond des choses”
 - un “esprit profond”
 - un “puits de science”
 - un “être superficiel”

1.2. Informations sur la structure interne

- Presque toutes les informations que l’on peut avoir sur des paramètres de la structure interne d’un corps sont des “information intégrées”, au sens que l’observable physique résulte d’une sommation sur tout l’objet :

$$\text{observable} = \iiint f(\rho, \mathbf{r} \dots) d^3\mathbf{r}$$

alors que le terme $f(\rho, \mathbf{r} \dots)$ n’est lui pas directement observable

– Aucune observable physique de ce type ne peut fournir d’information détaillée sur la structure interne d’un corps ! elle ne donne accès qu’à une moyenne sur le volume de l’objet (cette moyenne étant souvent spatialement pondérée de façon très défavorable).

★ Mais on verra comment l’*information sismique* peut fournir, plus facilement que d’autres, une information locale de la structure interne.

a. 3^e loi de Kepler (pb à 2 corps)

- Rappel de la 3^e loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(M_1 + M_2)}$
 - fournit la masse totale d'un système double
 - en présence d'autres observables, peut fournir la masse de chacune des composantes

b. Théorème de Gauss

- Un corps sphérique est équivalent, du point de vue gravitationnel, à un point matériel de masse équivalente.
- La symétrie sphérique empêche de voir la structure !
- ★ du point de vue gravitationnel : soleil creux \equiv soleil plein \equiv objet ponctuel \equiv trou noir de masse identique

c. Luminosité, magnitude absolue

- Grandeur énergétique intégrée sur tout le corps
- Energie électromagnétique produite dans les régions les plus centrales, puis processée à la mode "corps noir"³

d. Champ magnétique

- Description dipolaire, quadrupolaire... multipolaire \equiv description globale
- Origine mal comprise \leftrightarrow difficulté de faire le lien avec la structure interne
- La présence d'un champ magnétique dénote un intérieur conducteur (pas un aimant permanent⁴)
 - Soleil : plasma d'hydrogène
 - Terre : noyau de fer
 - Jupiter : hydrogène métallique

2. Ordres de grandeur

★ Le but de ce chapitre est de montrer comment, avec les mains et aussi un peu de physique, on peut rapidement obtenir des ordres de grandeur corrects pour certaines variables.

On s'intéresse dans un premier temps à des variables thermodynamiques intensives, température et pression, au sein d'un objet. Plusieurs notions abordées dans un premier temps brièvement seront ensuite détaillées dans le chapitre 'Equation d'état'.

3. Un photon γ émis au centre du Soleil, met environ 10^4 ans pour sortir, après de multiples processus d'absorption et réémission, sous forme de photons essentiellement visibles, qui n'apportent plus d'information directe sur ce qui se passe précisément à l'intérieur.

4. Cf. l'existence du point de Curie

?! Pourquoi ne s'intéresse-t-on pas aux variables extensives?⁵

-
- On aborde ensuite des variables de temps et d'espace.

2.1. Température

Où l'on cherche à obtenir une estimation rapide de la température centrale au sein d'un objet autogravitant.

- L'énergie d'interaction gravitationnelle Ω d'une étoile de masse M et rayon R s'exprime, d'après l'analyse dimensionnelle :

$$\Omega \propto -\frac{GM^2}{R}$$

- On peut alors estimer la température centrale d'un corps *condensé*, en supposant valide l'équation d'état du gaz parfait classique.
 - Chaque particule possède une énergie cinétique de translation moyenne :

$$e_c = \frac{3}{2} k_B T$$

D'où l'énergie cinétique totale de l'objet (collection de N particules) :

$$\mathcal{E}_c = N e_c$$

- Lors de la phase d'effondrement ayant conduit à l'objet condensé, on suppose conservée l'énergie mécanique⁶.
 - Initialement : $\mathcal{E}_c = \Omega = 0$

?! A justifier⁷

– Finalement : $\mathcal{E}_c + \Omega = 0$.

- Donc, partant d'une énergie mécanique totale nulle, on arrive à une énergie cinétique microscopique potentiellement très importante, car l'énergie interne gravitationnelle ne peut être que très négative puisque c'est une énergie de liaison, apparue lors de la contraction de l'objet.

5. Parce qu'elles sont extensives !

6. On verra plus loin que c'est en fait faux à un facteur 1/2 près

7. Nuage interstellaire froid et très peu dense

– En supposant l’objet constitué de particules de masse atomique A , on déduit de ce qui précède la température centrale T_c :

$$k_B T_c \propto \frac{GM A m_p}{R}$$

objet	M (kg)	R (km)	A	$T_{\text{estimée}} = \frac{GM A m_p}{k_B R}$ (K)	T_c “vrai”
Soleil	2.10^{30}	7.10^5	1	2.10^7	$1,58.10^7$
Jupiter	2.10^{27}	7.10^4	1	2.10^5	2.10^4
Terre	6.10^{24}	6.10^3	56	4.10^5	8.10^3

TAB. 2 – *Ordre de grandeur de la température : comparaison entre l’estimation de la température centrale et la valeur donnée par les modèles.*

?! Analyse de la Table 2⁸

★ Il est donc nécessaire de comprendre l’origine de ces désaccords... ce qui fait bien-sûr l’objet de la suite du cours.

2.2. Pression

★ Dans ce paragraphe, on s’interroge sur l’origine de la pression interne au sein d’un corps condensé. Si ce corps est à l’équilibre, il faut bien un terme de pression pour s’opposer à la gravitation... mais l’origine de ce terme peut prendre diverses formes.

★ Plusieurs notions sont très rapidement introduites, puis seront détaillées plus loin.

★ Unités courantes de pression : 1 bar = 10^5 Pa ; 1 Mbar = 10^{11} Pa = 100 GPa

• L’analyse dimensionnelle fournit un ordre de grandeur de la pression interne à supporter au sein d’objet *autogravitant* et à *symétrie sphérique* :

$$P_c \propto G \frac{M^2}{R^4} \tag{1}$$

8. Ça a l’air de marcher pour le soleil, pas pour Jupiter ou la Terre ; c’est normal, puisque l’on s’est appuyé sur l’équation d’état du GP, et que celle-ci ne s’applique pas dans Jupiter et la Terre, comme on le voit dans ce qui suit

objet	M	R	$P_{\text{estimée}} = G \frac{M^2}{R^4}$	P_c "vrai"
	(kg)	(km) (Pa)
Soleil	2.10^{30}	7.10^5	10^{15}	$2,5.10^{15}$
Jupiter	2.10^{27}	7.10^4	10^{13}	$\simeq 10^{13} *$
Terre	6.10^{24}	6.10^3	10^{12}	7.10^{11}

(* pas du tout précis, en l'absence de données sismiques...)

TAB. 3 – *Ordre de grandeur de la pression : comparaison entre l'estimation de la pression centrale et la valeur communément admise*

?! Analyse de la Table 3⁹

a. *Pression thermique*

- Terme de pression dû à l'énergie cinétique microscopique
 - Au sein du gaz parfait classique, ce terme de pression s'exprime :

$$P_K = \rho k_B T / m$$

b. *Pression de radiation*

- Terme de pression du gaz de photon
 - La pression de radiation P_{rad} , due au gaz de photon à la température T , s'exprime par :

$$P_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4 = \frac{1}{3} a T^4$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5,67.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$

La grandeur a s'exprime, comme chacun sait, par : $a = \frac{4\sigma}{c} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3}$.

c. *Pression de dégénérescence électronique*

- Terme de pression due aux effets quantiques.
- ★ Dans un milieu¹⁰ dilué, la statistique de Maxwell-Boltzman fait le lien entre l'énergie cinétique des particules et la température T . Mais dans un milieu dense, les particules interagissent entre elles en révélant leur nature quantique, et obéissent aux statistiques de Fermi-Dirac ou Bose-Einstein selon leur nature.
 - Ainsi, dans un milieu froid ou dense, les termes cinétiques peuvent devenir négligeable et les interactions entre électrons, fermions, prépondérantes.
 - La pression est alors dominée par la pression de dégénérescence P_{deg} des électrons (s'il y a des électrons)
 - qui ne dépend plus de la température¹¹, mais seulement de la masse volumique ρ et des nombres de charge et de masse de l'espèce dominante :

$$P_{\text{deg}} = 2 \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_p} \right)^{5/3}$$

où $Z\rho$ représente la charge, et Am_p la masse.

d. *Pression thermique* \longleftrightarrow *pression de dégénérescence* \longleftrightarrow *pression de radiation*

objet	ρ (kg/m ³)	A	T (K)	P_c	P_K au centre (Pa)	P_{deg}	P_{rad}
Soleil	1,6.10 ⁵	1	1,6.10 ⁷	2.10 ¹⁵	2.10 ¹⁶	5.10 ¹⁵	1.10 ¹³
Jupiter	2.10 ⁴	16	2.10 ⁴	1.10 ¹³	4.10 ¹²	5.10 ¹³	–
Terre	7,0.10 ³	56	8.10 ³	1.10 ¹²	8.10 ⁹	8.10 ¹²	–

TAB. 4 – Comparaison des termes de pression cinétique ou de dégénérescence

- ★ Même le soleil n'est pas assez chaud pour être "soutenu", au centre, par les photons¹² (pression centrale dominée par la pression thermique).
- ★ L'analyse des données de la Table 4 montre que c'est la pression des électrons qui est susceptible de soutenir Jupiter et la Terre.

2.3. Longueurs

a. *Distance moyenne entre particules* λ_n

- Comme son nom l'indique !
- En fonction de la densité particulière n , la distance moyenne séparant les particules d'une même espèce s'écrit :

$$\lambda_n = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}$$

9. Ça marche, et pas que pour le soleil ; mais en fait, ça ne peut que marcher, puisque ces objets existent ! autrement dit il faut bien expliquer leur équilibre

10. Ce milieu est le plus généralement un plasma

11. La température rend compte de l'agitation thermique ; mais si les effets quantiques apparaissent, c'est que la densité de matière devient suffisamment importante pour négliger dans un premier temps l'agitation cinétique

12. La pression de radiation commence à jouer un rôle pour les étoiles plus massives qu'environ 5 masses solaires

P dég. détaillée plus loin

b. *Longueur d'onde de Compton* λ_c

- Longueur d'onde associée à l'énergie au repos d'une particule.

Pour une particule de masse m :

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$$

?! Retrouver cette expression, et montrer ce qui ne va pas¹³

c. *Longueur d'onde thermique* λ_K

- Longueur d'onde associée à l'énergie d'agitation thermique d'une particule (on dit aussi longueur d'onde de de Broglie).

De la définition, on écrit :

$$\frac{h\nu_K}{\lambda_K} = k_B T$$

On distingue les cas classique ($v_K \simeq \sqrt{k_B T/m}$) et relativiste ($v \simeq c$). D'où les expressions, avec introduction comme pour λ_c d'un facteur 2π :

$$\lambda_K = \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{mk_B T}} & \text{cas classique} \\ \frac{\hbar c}{k_B T} & \text{cas relativiste} \end{cases}$$

d. *Distance d'approche minimale* λ_{\min}

- Comme son nom l'indique, la répulsion étant assurée par l'interaction électrostatique entre particules de même charge.

– On dérive cette distance de l'équation d'approche exprimant la conservation de l'énergie, dans un cas limite d'énergie totale nulle à grande distance :

$$\mathcal{E}_c + E_p = 0$$

Le terme potentiel traduit l'interaction électromagnétique : $E_p = (Zq)^2/4\pi\epsilon_0 r = (Ze)^2/r$.

Le terme cinétique est, dans le cas d'un milieu dégénéré, l'énergie de Fermi (cf. chapitre "le fluide parfait de fermions"). D'où les deux expressions de λ_{\min} :

$$\lambda_{\min} = \begin{cases} \frac{Z^2 e^2}{k_B T} & \text{cas non dégénéré} \\ \frac{Z^2 e^2}{E_F} & \text{cas dégénéré} \end{cases}$$

L'expression de l'énergie de Fermi dépend du caractère classique ou relativiste du gaz.

13. D'après $mc^2 = hc/\lambda_c$, on s'attend à $\lambda_c = h/mc$; le facteur 2π est d'origine conventionnelle

$$E_F \simeq \begin{cases} \frac{h^2}{m} n^{2/3} & \text{cas classique} \\ hc n^{1/3} & \text{cas relativiste} \end{cases}$$

2.4. Caractérisation du milieu

★ Des ordres de grandeurs précédemment établis, on peut dériver certains critères permettant de caractériser le milieu. Ces différents critères seront exprimés en fonction des grandeurs thermodynamiques n et T .

a. Dégénérescence ; nombre de Fermi Δ

- On mesure la dégénérescence du milieu en comparant la longueur d'onde thermique à la distance moyenne entre particules, via le nombre de Fermi Δ :

$$\Delta = \frac{\lambda_K}{\lambda_n} \begin{cases} \ll 1 & \text{cas non dégénéré} \\ = 1 & \text{cas limite} \\ \gg 1 & \text{cas totalement dégénéré} \end{cases}$$

– Δ varie en fonction de la densité particulaire n et de la température T comme :

$$\Delta(n, T) \propto \begin{cases} \frac{n^{1/3}}{T^{1/2}} & \text{cas classique} \\ \frac{n^{1/3}}{T} & \text{cas relativiste} \end{cases}$$

?! Retrouver ce qui précède, et déterminer les coefficients numériques des égalités

b. Effets relativistes ; nombre d'Einstein B

- On mesure l'importance des effets relativistes au sein du milieu en comparant l'agitation du milieu (λ_K dans le cas non dégénéré, mais λ_n dans le cas dégénéré) à l'énergie de masse (retranscrite par la longueur d'onde de Compton). D'où le nombre d'Einstein B :

$$B = \begin{cases} \frac{\lambda_c}{\lambda_K} & \text{cas non dégénéré} \\ \frac{\lambda_c}{\lambda_n} & \text{cas totalement dégénéré} \end{cases}$$

Les effets relativistes sont mesurés par B $\begin{cases} \ll 1 & \text{cas classique} \\ = 1 & \text{cas limite} \\ \gg 1 & \text{cas relativiste} \end{cases}$

– B varie en fonction de la densité particulaire n et de la température T comme :

$$B(n, T) \propto \begin{cases} T^{1/2} & \text{cas non dégénéré} \\ n^{1/3} & \text{cas dégénéré} \end{cases}$$

?! Retrouver ce qui précède

c. *Gaz réel ; nombre de Coulomb*

- On mesure l'idéalité du milieu en comparant la longueur d'approche minimum λ_{\min} à la distance moyenne entre particules, via le nombre de Coulomb \mathcal{C} , dénommé aussi facteur de couplage :

$$\mathcal{C} = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_n} \begin{cases} \ll 1 & \text{cas idéal} \\ = 1 & \text{cas limite} \\ \gg 1 & \text{cas non idéal} \end{cases}$$

– \mathcal{C} varie en fonction de la densité particulaire n et de la température T comme :

$$\mathcal{C}(n, T) \propto \begin{cases} n^{1/3} & \text{cas non dégénéré} \\ \frac{T}{n^{-1/3}} & \text{cas dégénéré et non relativiste} \\ \text{cste} & \text{cas dégénéré et relativiste} \end{cases}$$

?! Retrouver ce qui précède

2.5. Echelles de temps

a. *Echelle de temps radiative t_{rad} (Kelvin-Helmholtz)*

- Mesure la difficulté des photons à s'extraire d'un objet
 - On note σ la section efficace d'interaction d'un photon avec le milieu de densité particulaire n . Le libre parcours moyen Λ d'un photon vaut :

$$\Lambda = (n\sigma)^{-1}$$

?! Proposer un schéma explicitant cette égalité¹⁴

– Le processus de diffusion du photon est un processus de marche au hasard. La distance à parcourir entre le lieu d’émission et celui de l’“échappement”, ie. le rayon R de l’étoile, se fait en N étapes (Fig. 3), tel que :

$$N \simeq (R/\Lambda)^2$$

– D’où la durée moyenne nécessaire à l’échappement du “photon” (qui d’ailleurs en a profité pour passer du domaine X au domaine visible) :

$$t_{\text{rad}} = \frac{N\Lambda}{c} = \frac{R^2}{\Lambda c} \quad (2)$$

– On peut estimer la section efficace comme étant la section efficace de Thomson, relié au rayon classique¹⁵ de l’électron r_e , en supposant que l’opacité provient de la diffusion Thomson sur les électrons libres du plasma :

$$\sigma = \sigma_{\text{Th}} = \pi r_e^2 = \pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = \pi \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 = \pi \alpha^2 \lambda_c^2$$

où α est la constante de structure fine et λ_c la longueur d’onde réduite de Compton de l’électron ($1,5 \cdot 10^{-25}$ m).

• La section efficace de Thomson, $\sigma_{\text{Th}} = 2,5 \cdot 10^{-29} \text{ m}^{-2}$... est en fait ici une mauvaise estimation, car l’opacité est dominée par l’ionisation et l’excitation des éléments lourds, 10^4 fois moins nombreux que l’hydrogène, mais 10^6 fois plus “efficace” : $\sigma \simeq 100 \sigma_{\text{Th}}$.

14. Lors du parcours Λ , le photon balaye un volume $\sigma\Lambda$, “volume libre moyen” où l’on ne trouve qu’un particule, occupant un volume par particule par définition inverse de la densité particulaire n

15. Rayon de l’électron défini par $m_e c^2 = \text{énergie d’interaction électrostatique d’une sphère uniformément chargée}$.

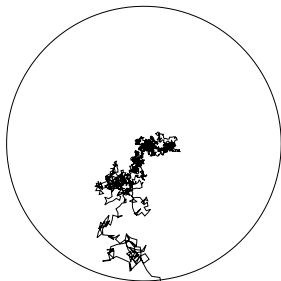


FIG. 3 – Simulation, qualitative, de l’extraction de l’énergie solaire par processus radiatif : marche au hasard d’une série de photons

?! Proposer une explication¹⁶

AN : $\sigma_{\text{Th}} = 2,5 \cdot 10^{-29} \text{ m}^{-2}$
 $n_{\text{H}} = 10^{30} \text{ m}^{-3}, n_{\text{Z}} = 10^{26} \text{ m}^{-3},$
 $\Lambda_{\text{H}} = 10^{-1} \text{ m}, \Lambda_{\text{Z}} = 10^{-3} \text{ m},$
 $\Rightarrow t_{\text{rad}} \simeq 3 \cdot 10^{11} \text{ s (10 000 ans }^{17})$

• On peut déduire de ce temps caractéristique t_{rad} une information sur la luminosité L de l'étoile en fonction de la masse M .

– On suppose que ce sont les photons qui transportent l'énergie produite au centre, et assurent donc la luminosité en surface de l'étoile. L'équation d'état du gaz de photons donne la densité d'énergie radiative $u_{\text{rad}} = aT^4$

– On obtient un ordre de grandeur de la luminosité par le rapport entre l'énergie radiative et la durée d'échappement d'un photon :

$$L = U_{\text{rad}}/t_{\text{rad}}$$

On en déduit :

$$L = aT^4 \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\Lambda c}{R^2} = \frac{4}{3}\pi aT^4 R \Lambda c$$

On estime le libre parcours Λ en fonction des paramètres stellaires M et R .

– D'une part, $\Lambda = (n\sigma)^{-1} \propto V/N\sigma$, et comme le paramètre σ rend compte uniquement de la micro-physique en jeu, indépendamment des masse et rayon :

$$\Lambda \propto R^3/M$$

– D'autre part, la température de l'étoile varie comme M/R . L'analyse dimensionnelle donne en effet :

$$\rho \propto \frac{M}{R^3} \quad \text{et} \quad P \propto \frac{M^2}{R^4}$$

Le gaz parfait ajoute :

$$P \propto \rho T$$

D'où l'on tire :

$$T \propto \frac{M}{R}$$

• On en déduit la dépendance de la luminosité L vis à vis de la masse M de l'objet¹⁸:

16. Les e^- de ces éléments sont plus faciles à éplucher (éléments plus ionisables)

17. Cette très longue durée montre combien le soleil est "absorbant", et son rayonnement a donc le temps de devenir celui d'un corps noir

18. Par ailleurs, on peut tenir le raisonnement suivant : la luminosité dépend du *gradient* de température (si T est uniforme, le flux de photons est équilibré !)

$$L \propto \frac{R^2 T^3 \frac{dT}{dR}}{\rho \kappa} \propto \frac{RT^4}{\rho}$$

Et on en déduit :

$$L \propto R \frac{M^4}{R^4} \frac{R^3}{M} \propto M^3$$

$$L \propto \frac{R^{1+3}}{M} \frac{M^4}{R^4} \propto M^3$$

★ Le long de la séquence principale, on observe : $L \propto M^{3,3}$

- On peut également comparer les températures centrale et d'équilibre :

$$\begin{cases} \text{flux intérieur} & : v_{\text{rad}} a T_c^4 \\ \text{flux s'échappant} & : c a T_{\text{éq}}^4 \end{cases}$$

La conservation du flux d'énergie conduit, avec $v_{\text{rad}} = R/t_{\text{rad}} = \Lambda c/R$, au rapport des températures :

$$\frac{T_{\text{éq}}}{T_c} = \left(\frac{\Lambda}{R} \right)^{1/4}$$

AN : Pour le soleil : $T_{\text{éq}}/T_c \simeq 1/2000$

?! Vérifier l'ordre de grandeur¹⁹

19. $\Lambda/R \simeq (10^{-3}/10^9)^{1/4}$; $T_{\text{éq}} = 5800 \text{ K}$ et $T_c = 15.10^6 \text{ K}$

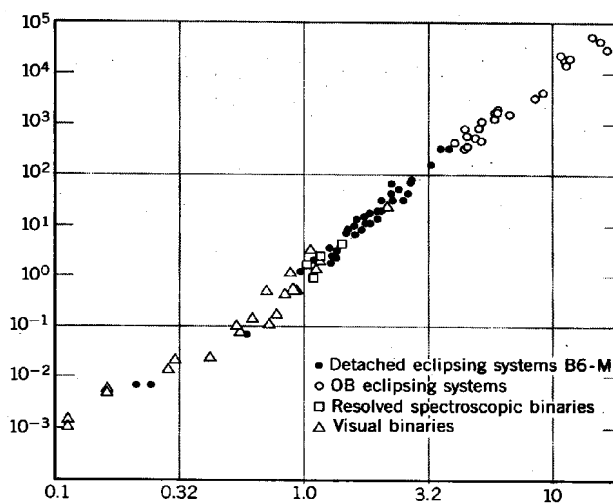


FIG. 4 – Relation masse-luminosité: unités de masse et de luminosité solaires

b. *Echelle de temps collisionnelle* t_c

- Durée moyenne entre deux chocs d'une particule au sein du milieu.
 - dépend du libre parcours moyen ℓ et de la vitesse thermique v_{th} : $t_c = \ell/v_{th}$.
 - GP d'hydrogène : t_c dépend de la température T du milieu, de sa densité particulaire n et du rayon de l'atome de Bohr a_0 :

$$\ell = (4\pi n a_0^2)^{-1} \quad \text{et} \quad v_{th} = \sqrt{3k_B T/m_H}$$

Et donc :

$$t_c = \frac{1}{4\pi n a_0^2 \sqrt{\frac{3k_B T}{m_H}}}$$

	<i>soleil</i>	T	n	ℓ	v_{th}	t_c
		K	m^{-3}	m	$km.s^{-1}$	s
<i>intérieur</i>	10^7	10^{30}	3.10^{-11}	500	6.10^{-17}	
<i>surface</i>	10^4	10^{22}	3.10^{-3}	15	2.10^{-7}	

TAB. 5 – *Echelle de temps collisionnelle dans l'intérieur solaire*

?! Commenter la valeur numérique de ℓ dans l'intérieur solaire (Tab 5)²⁰

- Pertinence de l'échelle de temps collisionnelle t_c ? C'est l'échelle de temps qui mesure les phénomènes suivants :
 - équilibre cinétique
 - equipartition de l'énergie
 - équilibre d'ionisation, réaction chimique
- Le transport de l'énergie peut-il avoir lieu par conduction ? On note N_c le nombre de collisions entre le centre et la surface, résultant d'un processus de marche au hasard :

$$N_c \simeq \left(\frac{R}{\ell}\right)^2$$

et on obtient une estimation de l'échelle de temps de conduction : $t_{cond} = N_c t_c$, d'où :

$$t_{cond} = \frac{R^2}{\ell v_{th}}$$

AN : $t_{cond} \simeq 10^{27} \text{ s} \simeq 10^{19} \text{ ans}$ pour le soleil

20. $\ell \simeq a_0$; les effets quantiques se font sentir, et donc la pression de dégénérescence électronique n'est plus tout à fait négligeable

?! Conclure

- c. Echelle de temps dynamique t_d , ou temps de chute libre
- Pour un corps autogravitant de masse M et rayon R , l'analyse dimensionnelle impose :

$$t_d = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$$

où $\bar{\rho}$ est la masse volumique moyenne du corps.

objet	M kg	R km	$\bar{\rho}$ kg.m ⁻³	t_d s
Soleil	2.10 ³⁰	7.10 ⁵	1400	1600
Jupiter	2.10 ²⁷	7.10 ⁴	1400	1600
Terre	6.10 ²⁴	6.10 ³	6600	740

TAB. 6 – Echelle de temps dynamique pour différents objets

– Il est bien-sûr tout à fait licite d'estimer via la chute libre d'un corps, dans un champ gravitationnel $\gamma = GM/R^2$ supposé uniforme) :

$$\frac{1}{2} \gamma t_d^2 = R, \text{ soit } t_d \propto \sqrt{R^3/GM}$$

– Ou bien en s'intéressant à la propagation d'une perturbation mécanique, qui par définition a lieu à la vitesse du son.

$$c_{\text{son}}^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \propto \frac{PV}{M}$$



FIG. 5 – Sir Isaac Newton, et comment il aurait découvert le concept d'échelle de temps dynamique

Or, comme PV représente l'énergie interne, on doit avoir $PV \propto GM^2/R$. Et l'on retrouve donc toujours la même forme du temps dynamique (comment d'ailleurs pourrait-il en être autrement, puisque l'on se contente de présenter autrement la même physique appliquée au même corps?).

- Cette échelle de temps donne la mesure de :
 - la durée d'effondrement d'un corps sous sa seule gravité
 - la période fondamentale des oscillations du corps
 - également la période de révolution d'un satellite en orbite rasante

d. *Echelle de temps thermique* t_K

- Durée associée au renouvellement de l'énergie thermique d'un astre, perdue du fait de sa luminosité L , l'énergie disponible étant l'énergie de liaison gravitationnelle :

$$t_K \simeq -\frac{\Omega}{L}$$

AN : pour le soleil, $-\Omega = 4.10^{41}$ J et $L = 4.10^{26}$ W, d'où $t_K = 10^{15}$ s = 3.10^7 ans.

?! Qu'advient-il d'un corps qui n'a pas démarré de réactions nucléaires au bout de t_K ?²¹

e. *Echelle de temps nucléaire* t_{nucl}

- Durée de vie maximale d'une étoile brûlant tout son hydrogène

$$t_{\text{nucl}} \simeq \Delta Mc^2/L$$

AN : On suppose la luminosité solaire constante au cours de son évolution.

– La luminosité du soleil est entretenue par la réaction de fusion de l'hydrogène en hélium, qui dégage une énergie de $0,007 mc^2$ par nucléon de masse m .

⇒ t_{nucl} de l'ordre de 10^{11} ans (surestimé d'un facteur 10 car suppose que tout l'hydrogène a pu être brûlé).

- Durée de vie du soleil ayant pour seule source d'énergie une réaction chimique typique

$$t_{\text{chim}} \simeq n\Delta H/L$$

AN : avec $\Delta H = 100 \text{ kJ.mol}^{-1}$, $t_{\text{chim}} = 10^4$ ans ...

21. Il ne les démarrera jamais ; mais t_K peut être très long, p.ex. pour une naine brune brûlant tout doucement (\equiv sur plusieurs milliards d'année) son deutérium

3. Objets froids

Ce chapitre aborde les notions suivantes :

- Apprendre à distinguer les propriétés d'un objet froid de celle d'un objet chaud, ou, en termes plus techniques, apprendre à distinguer un milieu dégénéré d'un milieu non-dégénéré.
- Etablir l'équation d'état du gaz parfait dans des conditions thermodynamiques plus vastes que ' $PV = nRT$ '

3.1. Froid?

- Un objet condensé est dit froid si la densité d'énergie cinétique microscopique (l'agitation thermique) ne joue qu'un rôle annexe dans sa structure.
- Sa densité maximale découle du principe d'exclusion de Pauli appliqué aux électrons du nuage électronique.
- On examine donc les conditions d'équilibre de l'objet en supposant la matière empilée de façon aussi compacte que possible.

3.2. Etude de l'équilibre

★ On examine les énergies d'interaction *mécanique* et *électrostatique* d'une collection de N atomes d'hydrogène. On suppose un empilement soit régi par l'interaction gravitationnelle, soit par l'interaction électrostatique.

a. Empilement gravitationnel

On définit l'énergie mécanique du système par :

$$E_{\text{méc}} \simeq N \frac{p^2}{2m_e} - \frac{N^2}{2} \frac{Gm_H^2}{d}$$

– L'énergie cinétique est due aux N électrons de masse m_e et de quantité de mouvement moyenne p

– Le lien gravitationnel repose sur les $N^2/2$ paires de noyaux (noyau de masse m_H); la distance moyenne d entre 2 noyaux est de l'ordre de grandeur du rayon de l'objet.

★ Le rapport des masses entre le proton et l'électron est tel que l'on suppose les premiers seuls en mouvement, et les seconds seuls massifs

- Le principe d'incertitude appliqué aux électrons conduit à :

$$\Delta r \cdot \Delta p \simeq \hbar$$

– Les incertitudes Δr et Δp sont du même ordre de grandeur que les valeurs r et p ; r est la distance caractéristique entre électrons

?! Expliquer pourquoi r est a priori très différent de d ²²

On a donc :

$$r \cdot p \simeq \hbar$$

– entre la variable spatiale r , taille caractéristique microscopique, et la variable spatiale d , taille caractéristique macroscopique, la relation d’empilement s’exprime par :

$$N r^3 \simeq d^3$$

– L’énergie d’interaction mécanique peut donc se réécrire en fonction de N et p

?! $E_{\text{méc}}(N, p)$?²³

• Le système à l’équilibre se cale dans l’état d’énergie minimale, déterminé par la condition :

$$\frac{dE_{\text{méc}}}{dp} = 0$$

Ceci conduit aux expressions :

$$\begin{cases} p & \simeq & N^{2/3} & \frac{\mathcal{G}m_{\text{H}}^2 m_e}{\hbar} \\ E_{\text{méc}} & \simeq & -N^{7/3} & \frac{\mathcal{G}^2 m_{\text{H}}^4 m_e}{\hbar^2} \\ d & \simeq & N^{-1/3} & \frac{\hbar^2}{\mathcal{G}m_{\text{H}}^2 m_e} \end{cases}$$

Ce qui se réécrit de façon plus concise :

$$\begin{cases} p & \simeq & N^{2/3} & \frac{\hbar}{a_{\text{G}}} \\ E_{\text{méc}} & \simeq & -N^{7/3} & \frac{\mathcal{G}m_{\text{H}}^2}{a_{\text{G}}} \\ d & \simeq & N^{-1/3} & a_{\text{G}} \end{cases}$$

22. Il n’y a pas d’écrantage gravitationnel

23. $p = \hbar/r$; $r = N^{-1/3} d$; $p = N^{1/3} \hbar/d$:

$$E_{\text{méc}} = N \frac{p^2}{2m_e} - \frac{N^2}{2} \frac{\mathcal{G}m_{\text{H}}^2 p}{N^{1/3} \hbar} = N \frac{p^2}{2m_e} - \frac{N^{5/3} \mathcal{G}m_{\text{H}}^2}{2\hbar}$$

Où a_G représente le “rayon de Bohr gravitationnel” :

$$a_G = \frac{\hbar^2}{\mathcal{G}m_{\text{H}}^2 m_e}$$

dont l’expression est décalquée de celle du rayon²⁴ de Bohr atomique :

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

?! Discuter le rapport a_G/a_0 ; que représente une distance de l’ordre de a_G ($e^2 \equiv q_e^2/4\pi\epsilon_0$ avec $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ SI)?²⁵

b. *Empilement électrostatique*

★ On peut se douter a priori que, pour un objet pas trop gros, l’empilement n’est pas essentiellement régi par la gravitation. On s’intéresse pour cela à l’énergie électrostatique de l’empilement.

- L’énergie de liaison des N électrons aux N noyaux, est de l’ordre de $-N$ Rydberg :

$$E_{\text{élec}} \simeq -N \frac{m_e e^4}{\hbar^2}$$

- La dimension caractéristique du système est donnée par un empilement de sphères dures dont le rayon vaut le rayon de Bohr a_0 :

$$d \simeq N^{1/3} \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = N^{1/3} a_0$$

c. *Bilan et équilibre*

De ce qui précède, on remarque le comportement différent de la taille caractéristique d de l’objet selon l’interaction qui domine l’empilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{empilement électrostatique : } d \propto N^{1/3} \\ \text{empilement gravitationnel : } d \propto N^{-1/3} \end{array} \right.$$

★ Et donc, lorsque l’objet est petit, les termes électrostatiques l’emportent sur ceux gravitationnels.

24. Rappel : le rayon de Bohr a_0 peut être défini à partir des 2 égalités : $a_0 p_0 \simeq \hbar$ et $p_0^2/m a_0 = e^2/a_0^2$

25. $a_G/a_0 \simeq F_{\text{él}}/F_{\text{grav}} \simeq 10^{36} \rightarrow a_G \simeq 10$ Gpc ; avec $H_0 \simeq 70$ km.s⁻¹/Mpc, on voit que a_G correspond à “7.10⁵ km.s⁻¹”... a_G est donc de l’ordre du “rayon de l’Univers” ; $a_0 \simeq 10^{-10}$ m et $a_G \simeq 10^{+26}$ m

?! A illustrer par des exemples concrets

Des variations de d avec N , on déduit numériquement :

$$\begin{cases} \text{“petit” objet : } d \propto 10^{-10} N^{1/3} \\ \text{“grand” objet : } d \propto 10^{27} N^{-1/3} \end{cases}$$

?! Représenter d en fonction de N en échelle log-log et estimer le nombre N correspondant au changement de régime²⁶

⇒ On en déduit qu’un objet *froid* a une taille maximale (Fig. 6).

- L’équilibre entre termes de liaison gravitationnels et termes de cohésion électrostatiques conduit à l’égalité des estimations précédentes de la taille caractéristique d :

26. $N_{\text{éq}} = 10^{54}$

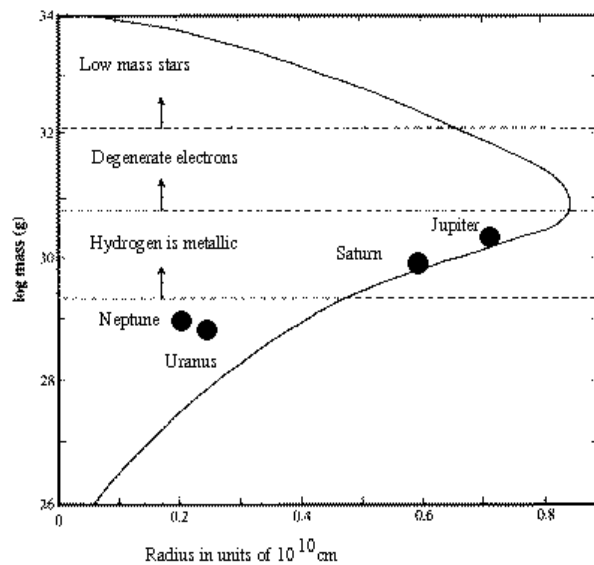


FIG. 6 – Relation masse-rayon pour un objet froid

$$\begin{cases} N_{\text{éq}} & \simeq \left[\frac{e^2}{\mathcal{G}m_{\text{H}}^2} \right]^{3/2} \\ d_{\text{éq}} & \simeq \sqrt{\frac{\hbar^2}{m_e e^2} \frac{\hbar^2}{\mathcal{G}m_{\text{H}}^2 m_e}} \end{cases}$$

- $d_{\text{éq}}$ est la moyenne géométrique :
 - du rayon de Bohr électrostatique a_0
 - et de son équivalent gravitationnel a_G

$$\begin{cases} N_{\text{éq}} & \simeq \left[\frac{a_G}{a_0} \right]^{3/2} \\ d_{\text{éq}} & \simeq \sqrt{a_0 a_G} \end{cases}$$

?! Calculer la masse correspondant à cette taille maximale. Jupiter est-il un objet particulier?²⁷

d. *Éléments lourds*

- On a jusqu'à présent uniquement considéré le cas de l'hydrogène, soit un électron ionisé par atome. Un atome de masse atomique A est susceptible de fournir Z électrons. Si l'atome est totalement ionisé, son énergie électrostatique varie alors comme $Z^{5/2}$. D'où les modifications :

$$\begin{cases} N & \simeq Z^{15/8} \left[\frac{e^2}{\mathcal{G}m_A^2} \right]^{3/2} \\ d & \simeq \sqrt{\frac{\hbar^2}{m_e e^2} \frac{\hbar^2}{\mathcal{G}m_A^2 m_e}} \end{cases}$$

e. *Application*

- Jupiter : essentiellement composé d'hydrogène $Z = A = 1$

$$\begin{cases} M & \simeq 2.10^{27} \text{ kg} \simeq M_{\text{Jup}} \\ d & \simeq 10^8 \text{ m} \simeq R_{\text{Jup}} \end{cases}$$

- Terre : essentiellement composée d'éléments lourds ; p.ex : Si, $A = 28$, $Z = 14$.

$$\begin{cases} M & \simeq 2.10^{24} \text{ kg} \simeq M_{\text{Terre}}/3 \\ d & \simeq 2.10^6 \text{ m} \simeq R_{\text{Terre}}/3 \end{cases}$$

3.3. Cas semi-relativiste

27. $N = (a_G/a_0)^{3/2} \simeq 10^{54} \rightarrow M = 10^{54} \cdot 10^{-27} = 10^{27} \text{ kg}$ càd la masse de Jupiter !

a. Gros objet froid

- Comme p croît comme $N^{2/3}$, arrive un moment où les électrons deviennent relativistes : $p \simeq m_e c$, pour une quantité de matière N_{sr} qui vérifie :

$$m_e c \simeq N_{\text{sr}}^{2/3} \frac{G m_{\text{H}}^2 m_e}{\hbar}$$

– Il en découle une nouvelle expression pour N :

$$N_{\text{sr}} \simeq \left[\frac{\hbar c}{G m_{\text{H}}^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

dont l'écriture est analogue à celle de l'expression classique précédemment trouvée :

$$N_{\text{éq}} \simeq \left[\frac{e^2}{G m_{\text{H}}^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

- On réécrit N_{sr} sous la forme :

$$N_{\text{sr}} \simeq \left[\frac{G m_{\text{H}}^2}{\hbar c} \right]^{-\frac{3}{2}}$$

pour mettre en évidence la “constante de structure fine de la gravitation” :

$$\alpha_g = \frac{G m_{\text{H}}^2}{\hbar c}$$

construite par analogie avec la constante de structure fine électrique :

$$\alpha_{\text{é1}} = \frac{e^2}{\hbar c}$$

D'où l'expression :

$$N_{\text{sr}} \simeq \alpha_g^{-\frac{3}{2}}$$

AN : La constante α_g mesure l'interaction gravitationnelle par rapport à l'interaction forte ; $\alpha_g = 6.10^{-39}$

– N_{sr} est de l'ordre de 2.10^{57} , alors que M_{\odot}/m_p vaut $1, 2.10^{57}$.

- Un objet froid et lourd... est une naine blanche
- Le nombre N_{sr} mis en évidence est appelé “nombre d'Avogadro stellaire”. Ce nombre N_{sr} de protons d'une étoile dépend :

- de la constante fondamentale α_g
- de l'équilibre qui conduit à $N_{\text{sr}} \propto \alpha_g^{-3/2}$

★ *Remarque* : on a comparé $m_e c$ à l'expression de p obtenue pour un objet lourd gouverné par la gravitation. La comparaison pour un objet léger gouverné par l'électrostatique, menée plus simplement par comparaison des énergies et non de p , eût conduit à : $N m_e c^2 \simeq N m_e e^4 / \hbar^2$ c'ad $(e^2 / \hbar c)^2 \simeq 1$. Ce résultat est en fait absurde, car $e^2 / \hbar c)^2$ n'est ni plus ni moins que la constante de structure fine électrique $\alpha_{\text{é1}}$, qui vaut $1/137$ et non 1.

⇒ Un petit objet froid ne peut pas être relativiste.

b. *Energie mécanique et équilibre*

On considère une collection d'atomes (masse A , charge Z) totalement ionisés. Le terme cinétique est encore dû aux électrons, alors que l'interaction gravitationnelle est dominée par les noyaux :

$$E_{\text{méc}} \simeq NZ \left[(p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} - m_e c^2 \right] - \frac{(NA)^2}{2} \frac{Gm_{\text{H}}^2}{d}$$

avec :

$$p = (NZ)^{1/3} \frac{\hbar}{d}$$

et donc :

$$E_{\text{méc}}(p) \simeq NZ \left[(p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} - m_e c^2 \right] - N^{5/3} A^2 Z^{-1/3} \frac{Gm_{\text{H}}^2}{2\hbar} p$$

L'équilibre est réalisé pour $dE_{\text{méc}}/dp$ nul, càd après quelques calculs pas difficiles ni très marrants :

$$\begin{cases} p &= & \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} & m_e c \\ E_{\text{méc}} &= & NZ \frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n^2} & m_e c^2 \end{cases}$$

avec $n = A^2 N^{2/3} Z^{-4/3} \alpha_g / 2$. Les équations précédentes préfèrent sensiblement $n < 1$. Mais n croît avec la quantité de matière N . Donc en distinguant parmi ces grandeurs la variable extensive N , il apparaît nettement une limite :

$$n = \left(\frac{N}{\mathcal{N}_{\text{éq}}} \right)^{2/3} \text{ et } \mathcal{N}_{\text{éq}} = 2^{3/2} Z^2 A^{-3} \alpha_g^{-3/2}$$

il s'agit à proprement parler du nombre d'Avogadro stellaire $\mathcal{N}_{\text{éq}} = 6,4 \cdot 10^{57} Z^2 / A^3$, pour une étoile de masse

$$M_{\text{éq}} = \mathcal{N}_{\text{éq}} A m_{\text{H}} \simeq \frac{Z^2}{A^2} 10^{31} \text{ kg}$$

AN : pour l'hydrogène: $A/Z = 1$, $M = 5M_{\odot}$, et pour un élément plus lourd: $A/Z \simeq 2$, et $M = 1,25M_{\odot}$

?! Calculer la taille caractéristique d de l'objet; montrer que c'est la moyenne géométrique du rayon de Bohr gravitationnel $\hbar^2 / Gm_{\text{H}}^2 m_e$ et de la longueur de Compton électronique $\hbar / m_e c$; quelle classe d'objet stellaire retrouve-t-on?

• Au delà de $\mathcal{N}_{\text{éq}}$, l'objet ne peut plus être stable en tant qu'astre autogravitant froid soutenu par la pression de dégénérescence électronique.

?! Quelle masse caractéristique pointe à l'horizon ?²⁸

4. Objets chauds

Chaud ?

- *Objet soutenu par la pression cinétique !*

4.1. Equilibre hydrostatique

- Le gradient de pression seul suffit à contrebalancer le poids des couches stellaires.
 - structure statique
 - ni terme de Coriolis, ni terme d'entraînement, ni "vents"
 - rôle du champ magnétique négligeable

$$\mathbf{grad} P = -\rho \mathbf{g}$$

4.2. Viriel

★ Implication directe de l'équilibre hydrostatique : il doit exister, via la pression cinétique, une relation entre l'énergie interne thermique E_K et l'énergie interne gravitationnelle Ω

- a. *Energie thermique E_K versus énergie gravitationnelle Ω*
 – Cas d'un astre obéissant à l'équation d'état du GP classique :

$$E_K \stackrel{\text{d'éf}}{=} \int_0^R n \cdot \frac{3}{2} k_B T \cdot 4\pi r^2 dr$$

avec n la densité particulaire, qui apparaît dans l'équation d'état du gaz parfait :

$$P = n k_B T$$

d'où l'écriture

$$E_K = \int_0^R \frac{3}{2} P 4\pi r^2 dr$$

– Comme la pression, d'après l'équilibre hydrostatique, est définie par son gradient :

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{\mathcal{G}m(r)}{r^2}$$

28. Pour $N = N_{\text{éq}}$ – les électrons ne seront plus capables de soutenir l'étoile... masse de Chandrasekhar; les étoiles à neutrons sont soutenues par la pression de dégénérescence neutronique

il est nécessaire d'introduire un artifice de calcul qui permet d'estimer le lien entre dP/dr et P : une intégration par parties, du terme de gradient multiplié par $4\pi r^3$.

- L'équilibre implique :

$$\int_0^R \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr = - \int_0^R \rho \frac{Gm(r)}{r} 4\pi r^2 dr$$

– D'une part, on retrouve l'énergie gravitationnelle :

$$\begin{aligned} \Omega &= - \int_0^R \rho \frac{Gm(r)}{r} 4\pi r^2 dr \\ &= - \int_0^R \frac{Gm(r) dm(r)}{r} \end{aligned}$$

– D'autre part, l'intégration par parties du gradient de pression donne :

$$\int_0^R \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr = [P \cdot 4\pi r^3]_0^R - 3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr$$

Le terme tout intégré est nul au centre ($r = 0$) ainsi qu'à la surface ($P \simeq 0$). On en déduit l'énergie thermique E_K :

$$-2 E_K = -3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr$$

- ★ D'où la *virialisation* :

$$\Omega + 2E_K = 0$$

b. *Que signifie cette équation du viriel ?*

- L'énergie interne thermique ne représente que la moitié de l'énergie interne gravitationnelle : un bilan énergétique vers un état à l'équilibre hydrostatique implique que la moyenne de l'énergie interne est perdue, par radiation
- Lors de la formation d'une étoile, il y a échauffement et obligatoirement perte d'énergie par radiation, à parts égales : $E_K = E_{\text{rad}}$
- ★ On peut écrire la loi de conservation de l'énergie :

$$E = \Omega + E_K + E_{\text{rad}} = 0$$

- ★ une proto-étoile brille déjà, avant même d'avoir allumé ses réactions nucléaires
- ★ Entre 2 états à l'équilibre hydrostatique, une contraction du rayon implique une perte d'énergie par radiation.

5. Le fluide parfait

- ★ Une équation d'état parfaite ne s'intéresse pas à la modélisation des termes d'interaction entre particules²⁹.

5.1. Le fluide parfait de fermions

²⁹. Ce sens est plus général que l'équation du gaz parfait étudiée en 1er cycle, qui correspond au cas classique chaud

a. *Approche statistique*

- On considère un gaz parfait de fermions : on peut mettre 2 particules par cellule élémentaire³⁰ (6-D) de l'espace des phases h^3 .
- Analyse statistique, dans l'espace des phases. Le nombre de particules dn , par unité de volume, ayant une énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ s'exprime par :

$$dn = \frac{dg(\varepsilon)}{\exp\left[-\eta + \frac{\varepsilon}{k_B T}\right] + 1}$$

– $dg(\varepsilon)$ est le poids statistique, c'est-à-dire le nombre d'états possibles entre les énergies ε et $\varepsilon + d\varepsilon$.

– η est le facteur de dégénérescence : $\eta = \mu/k_B T$, où μ est le potentiel chimique.

– $f = \left(\exp\left[\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right] + 1\right)^{-1}$ est le facteur d'occupation

?! Représenter $f(\varepsilon)$ à température nulle

- η est implicitement défini par la condition de normalisation

$$n = \int dn = \int_0^\infty \frac{dg(\varepsilon)}{\exp\left[-\eta + \frac{\varepsilon}{k_B T}\right] + 1}$$

- Pour s'en aller plus en avant dans l'établissement de l'équation d'état du gaz parfait de fermions (gaz de Fermi), il faut préciser les conditions physiques du gaz.

b. *Particules classiques ou relativistes*

- Lien entre la pression et la densité d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = ne_c$.

La pression est un flux de quantité de mouvement, soit en moyenne :

$$P = \frac{1}{3} n \langle p v \rangle$$

30. h^3 et non \hbar^3 !

?! Que représente le facteur 1/3?³¹

– Lien entre ce flux et la densité d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
 e_c &= (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2} - mc^2 \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 & = \frac{1}{2}pv & \text{si } p \ll mc \\ & = pc & \text{si } p \gg mc \end{cases}
 \end{aligned}$$

et donc

$$P = \begin{cases} \frac{2}{3} \mathcal{E}_c & \text{cas classique} \\ \frac{1}{3} \mathcal{E}_c & \text{cas relativiste} \end{cases}$$

c. Particules dégénérées ou non

$$\text{fluide} \begin{cases} \text{totalement dégénéré} & : f = 1 & \text{pour } p < p_F \\ & f = 0 & \text{pour } p > p_F \\ \text{non dégénéré} & : f \ll 1 & \text{quelque soit } p \end{cases}$$

★ Le cas totalement dégénéré correspond plus simplement à $k_B T \ll \varepsilon$, c-à-d $T = 0$.

d. Equation d'état : gaz classique et non dégénéré

• A l'énergie ε correspond sans équivoque la quantité de mouvement p telle que $\varepsilon = p^2/2m$. D'où la réécriture de la condition de normalisation :

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{2}{h^3} \int_{p=0}^{\infty} \frac{4\pi p^2 dp}{\exp\left[-\eta + \frac{\varepsilon}{k_B T}\right] + 1} \\
 &\simeq \frac{2}{h^3} \frac{4\pi}{\exp(-\eta)} \int_{p=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{p^2}{2mk_B T}\right] p^2 dp
 \end{aligned}$$

31. 3 est le nombre de dimensions spatiales

?! D'où provient le facteur 2?³²

La condition de normalisation permet³³ de déterminer le facteur de dégénérescence η :

$$e^{-\eta} = \frac{2 (2\pi m k_B T)^{3/2}}{n h^3} = \frac{2 \mathcal{B}(T)}{n}$$

d'où la distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$dn = n \cdot (2\pi m k_B T)^{-3/2} e^{-p^2/2mk_B T} 4\pi p^2 dp$$

– D'où les expressions de la pression et de la densité d'énergie cinétique, tenant compte de :

$$\mathcal{E}_c = \int \varepsilon(p) dn(p) \text{ et } P = \frac{2}{3} \mathcal{E}_c$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{2} n k_B T \text{ et } P = n k_B T$$

... ce qui nécessite quelques lignes de calculs³⁴, mais n'est pas trop surprenant !

e. *Equation d'état : gaz dégénéré*

La condition de normalisation est triviale, avec tous les niveaux occupés de 0 à p_F .

Autrement dit, $f = 1$ de 0 à p_F , nul au-delà :

$$n = \int dn = \frac{2}{h^3} \int_{p=0}^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$$

D'où $p_F = (3/\pi)^{1/3} h n^{1/3} / 2$

D'où l'énergie de Fermi E_F correspondante

D'où la densité d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = n E_F$:

$$\left[\begin{array}{l} \text{gaz classique : } \mathcal{E}_c = \frac{4\pi}{5mh^3} p_F^5 \\ \text{gaz relativiste : } \mathcal{E}_c = \frac{2\pi c}{h^3} p_F^4 \end{array} \right.$$

Ainsi que la pression :

$$\left[\begin{array}{l} \text{gaz classique : } P = 2\mathcal{E}_c/3 = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{n^{5/3}}{5m} \\ \text{gaz relativiste : } P = \mathcal{E}_c/3 = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3} \frac{c}{4} n^{4/3} \end{array} \right.$$

f. *Bilan : pression du fluide parfait*

32. Terme de spin

33. Avec $\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}/4$

34. Avec $\int_0^\infty x^4 \exp(-x^2) dx = 3\sqrt{\pi}/8$

fluide	non-dégénéré	totalemment dégénéré
classique	$nk_B T$	$\propto n^{5/3}$
relativiste	$nk_B T$	$\propto n^{4/3}$

TAB. 7 – Equations d'état du fluide parfait

?! Comparer les compressibilités du fluide classique non-dégénéré ou totalemment dégénéré³⁵

?! Comparer les compressibilités du fluide totalemment dégénéré classique ou relativiste

5.2. Gaz de photons

★ Rappels

- Le photon est relativiste !
- Le photon obéit à la statistique de Bose-Einstein.
- Le potentiel chimique du gaz de photons – qui représente l'énergie minimale à apporter pour ajouter une particule dans le gaz – est nul.
- Le photon possède 2 états de polarisation possibles.
- Le nombre de photons dn avec une quantité de mouvement comprise entre p et $p + dp$ s'exprime par :

$$dn = \frac{2}{h^3} \frac{4\pi p^2 dp}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1}$$

Ceci s'exprime en terme de densité volumique d'énergie spectrale $u(\nu)$, avec $p = h\nu/c$:

$$u(\nu) d\nu = h\nu dn = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1}$$

35. $\chi_T = -(\text{d ln } V/P)_T = (\text{d ln } \rho/P)_T = (\text{d ln } n/P)_T \propto 1/P$ car $n \propto P^{5/3}$

On retrouve la puissance rayonnée par un corps noir, par unité de surface, par unité spectrale et par unité d'angle solide :

$$B_\nu(T) = \frac{cu(\nu)}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1}$$

Ce terme B_ν s'exprime en $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$.

- La densité volumique d'énergie totale u ($\equiv \mathcal{E}_c$) vaut alors³⁶ :

$$u = \int_0^\infty u(\nu) d\nu = aT^4$$

– le facteur $a = 8\pi^5 k_B^4 / 15c^3 h^3 = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ SI}$ est à relier à la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = ac/4$.

– la pression de radiation correspondante est alors (sans oublier que le photon est ... totalement relativiste) :

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{3} u = \frac{1}{3} aT^4$$

6. Annexe : équations d'état, compléments

- *Le but de cette annexe se limite à introduire dans les grandes lignes les étapes nécessaires à l'obtention d'une équation d'état dans le cas des fluides non parfaits. Pour en savoir plus, se référer p.ex. à Forestini 1999.*

6.1. Notions de base

On s'intéresse au sort de $N = \sum N_i$ particules confinées dans un volume V à la température T .

– L'ensemble thermodynamique dont $[N_i, V, T]$ sont les variables naturelles est l'ensemble canonique.

– Les N particules sont caractérisées par un hamiltonien H ; la fonction de partition est donnée par la relation thermodynamique :

$$Z = \text{trace} \left[\exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) \right]$$

la trace étant prise sur tous les états quantiques du système.

– L'état thermodynamique du système est caractérisé par son potentiel thermodynamique, soit dans l'ensemble canonique, l'énergie libre de Helmholtz F (il s'agit de l'approche dite "chimique", consistant en la minimisation de l'énergie libre) :

$$F(N_i, V, T) = -k_B T \ln Z(N_i, V, T)$$

relation qui relie la physique microscopique, exprimée par la fonction de partition Z , à la physique macroscopique F .

36. Avec comme tout le monde sait $\int_0^\infty x^3 dx / (e^x - 1) = \pi^4/15$

- De la connaissance de l'énergie libre F découle celle de toutes les grandeurs thermodynamiques du système (avec : $\beta \stackrel{\text{déf}}{=} 1/k_B T$):

$$\left[\begin{array}{l} \text{pression : } P \stackrel{\text{déf}}{=} - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N_i, T} \\ \text{entropie : } S \stackrel{\text{déf}}{=} - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N_i, V} \\ \text{énergie interne : } U \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial \beta F}{\partial \beta} \right)_{N_i, V} \\ \text{pot. chimique : } \mu_i \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{V, T} \end{array} \right.$$

- Les dérivées secondes de l'énergie libre conduisent aux divers coefficients thermodynamiques et thermoélastiques :

$$\left[\begin{array}{l} \chi_\rho \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T \\ \chi_T \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \\ c_V \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\rho \\ c_P \stackrel{\text{déf}}{=} c_V + PQ \frac{\chi_T}{\rho T} \\ Q \stackrel{\text{déf}}{=} - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P \\ \nabla_{\text{ad}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{PQ}{\rho T c_P} \\ \Gamma_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \frac{\chi_\rho}{1 - \chi_T \nabla_{\text{ad}}} \end{array} \right.$$

- Conditions de stabilité

$$\left[\begin{array}{l} \text{stabilité mécanique : } \chi_T > 0 \\ \text{stabilité thermique : } c_V > 0 \end{array} \right.$$

– pour en savoir plus, voir le cours de thermo de Landau & Lifshitz

- On a l'habitude d'introduire les exposants adiabatiques, définis par :

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_{\text{ad}} \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log T} \right)_{\text{ad}} \\ \Gamma_3 - 1 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log \rho} \right)_{\text{ad}} \end{array} \right.$$

et abondamment utilisés pour la construction des intérieurs stellaires.

?! Montrer que $\gamma = \Gamma_{1,2,3}$ pour le gaz parfait classique non dégénéré, et pour lui seulement

★ Ce dernier point justifie la définition de ces coefficients

?! Calculer les Γ_i pour le rayonnement du corps noir

6.2. Approche “chimique” : minimisation de l’énergie libre

Ce paragraphe comme le suivant reste uniquement descriptif. Une présentation plus détaillée est donnée pour le cas solaire dans le chapitre “II/ Structure Interne”.

a. Approximations

Cette méthode (Graboske et al. 1971) suppose possible la factorisation de la fonction de partition, càd

- le découplage des termes d’énergies cinétique et potentielle

$$H(\mathbf{r}_{1,2\dots N}, \mathbf{p}_{1,2\dots N}) = \sum \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_i)$$

d’où :

$$Z = Z_{\text{GP}} Z_{\text{interactions}}$$

où le terme idéal du GP rend compte des effets purement cinétiques, $Z_{\text{interactions}}$ du potentiel d’interaction

- l’approximation en potentiel de paires ; càd l’omission des interactions à $N \geq 3$ objets :

$$U(\mathbf{r}_{1,2\dots N}) = \sum_{i < j} u(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$$

- l’approximation de faible perturbation des niveaux d’énergie internes, d’où :

$$Z = Z_{\text{GP}} Z_{\text{interactions}} Z_{\text{perturbations}}$$

★ yapuka exprimer les termes Z , et imaginer ensuite toutes les corrections à rajouter pour une bonne description physique

b. *A voir également*

- Equilibre chimique
 - Equation de Saha (loi d'action de masse)
- Fluide complètement ionisé non parfait
 - théorie de Debye-Hückel

6.3. Approche “physique” : développement en fugacité

★ ne fait intervenir que des particules fondamentales (noyaux, électrons)

– il n’y a pas de contraintes sur le nombre de particules du système étudié, et on utilise donc la grande fonction de partition Ξ de l’ensemble grand-canonique (qui fait intervenir les potentiels chimiques et non les nombres de particules comme variables indépendantes)

– développement en fugacité

– les états liés résultant des termes d’interactions à 2, 3, ... N corps apparaissent comme résultat de la modélisation (alors qu’ils sont présumés dans la description chimique)

★ voir le cours de structure interne du GdR “Structure interne des Etoiles et de Planètes Géantes” (Aussois 1990)